

الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبو غليون (رئيسًا)

هبة ماهر التميمي إبراهيم أحمد عمارة د. عيسى عبدالوهاب الطراونة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📱 @nccdjr 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2021/3)، تاريخ 2021/6/10 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2021/107) تاريخ 2021/6/30 م بدءاً من العام الدراسي 2021 / 2022 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2021.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 358 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2049)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات الصف الثامن: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛ مزيدة

ومنقحة. - عمان: المركز، 2022

(171) ص.

ر.إ.: 2022/4/2049

الواصفات: / الرياضيات / المناهج / التعليم الإعدادي /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعتبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1442 هـ / 2021 م

2022 م - 2025 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تنمي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُسهّل في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِيَ بإبراز خطة حلّ المسألة، فأفرّد لها دروساً مستقلة تتيح للطلبة التدرّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدّ كتاب التمارين على نحو يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأننا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداة مساعدة تُوفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداة تعليمية مُهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت طلبتنا أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

الوحدة ② تحليل المقادير الجبرية.....	66
مشروع الوحدة: القطع الجبرية	67
الدرس 1 حالات خاصة من ضرب المقادير الجبرية	68
نشاط مفاهيمي: تحليل المقادير الجبرية	74
الدرس 2 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر	75
الدرس 3 تحليل ثلاثيات الحدود $x^2 + bx + c$..	83
الدرس 4 حالات خاصة من التحليل	89
الدرس 5 تبسيط المقادير الجبرية النسبية	96
اختبار نهاية الوحدة	102

الوحدة ① الأعداد الحقيقية.....	6
مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن	7
الدرس 1 الجذور التربيعية	8
الدرس 2 الجذور الصماء	13
نشاط مفاهيمي: نظرية فيثاغورس	21
الدرس 3 نظرية فيثاغورس	22
الدرس 4 الأعداد الحقيقية	29
الدرس 5 الأسس النسبية والجذور	37
الدرس 6 ضرب الأسس النسبية وقسمتها	43
الدرس 7 الصيغة العلمية	50
الدرس 8 النسبة المئوية	57
اختبار نهاية الوحدة	64

الوحدة 4 المثلثات المتطابقة 146

مشروع الوحدة: أبني جسرًا 147

الدرس 1 تطابق المثلثات (SSS, SAS, HL) ... 148

الدرس 2 تطابق المثلثات (ASA, AAS) 156

الدرس 3 المثلثات المتطابقة الضلعين

والمثلثات المتطابقة الأضلاع 162

اختبار نهاية الوحدة 170

الوحدة 3 المعادلات الخطية بمتغيرين ... 104

مشروع الوحدة: المعادلات الخطية والخريطة ... 105

الدرس 1 المعادلة الخطية بالصورة القياسية 106

الدرس 2 ميل المستقيم 114

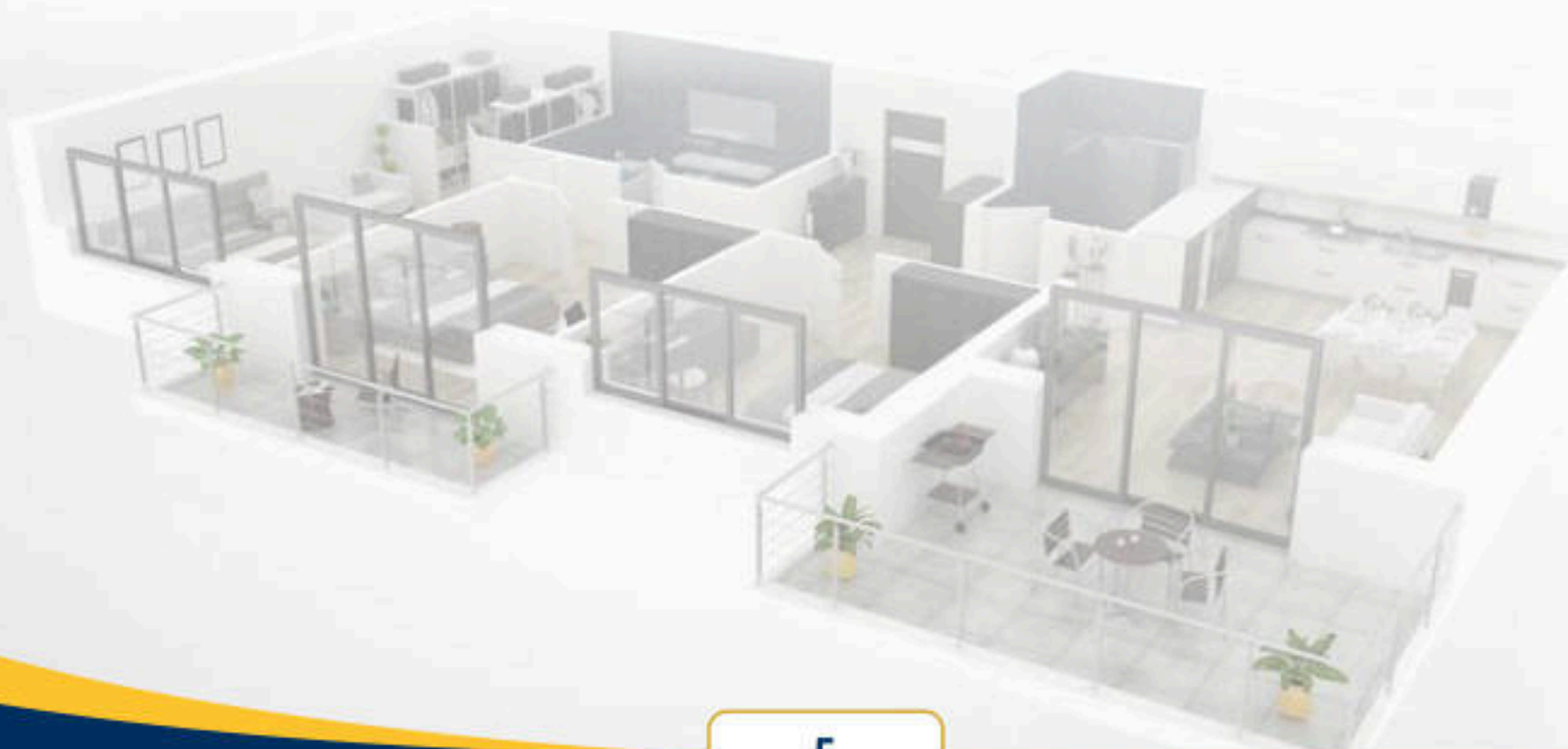
الدرس 3 معادلة المستقيم

بصيغة الميل والمقطع 121

الدرس 4 معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة ... 130

الدرس 5 المستقيمات المتوازية والمتعامدة 137

اختبار نهاية الوحدة 144



الأعداد الحقيقية

ما أهمية هذه الوحدة؟

للأعداد الحقيقية تطبيقات حياتية كثيرة، منها قياس الأطوال ونسب التغير في الكميات بدقة. ويمكن أيضاً استعمال الأعداد الحقيقية للتعبير عن الكميات الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً، مثل قطر الحمض النووي بالصيغة العلمية.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- التمييز بين الأعداد النسبية وغير النسبية.
- توظيف نظرية فيثاغورس وعكسها في حل مسائل حياتية.
- تطبيق قوانين الأسس النسبية في تبسيط مقادير أسية.
- حل مسائل حياتية على النسبة المئوية.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تبسيط مقادير عددية تتضمن أسساً صحيحة بتطبيق أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ حل مسائل حياتية باستعمال التناسب والتقسيم التناسبي.
- ✓ حل مسائل على النسبة المئوية تتضمن الخصم أو الضريبة.



مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن

3 أستعمل نظرية فيثاغورس لتحديد طول الوتر c . أستعمل خط الأعداد لتحديد c - إذا لزم الأمر - ثم أرسم الوتر، وأكمل باقي الشكل.

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي نوظف فيه ما نتعلمه في هذه الوحدة حول الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس في رسم زخرفة هندسية على الزجاج.

4 أكمل الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X) في الخانة المناسبة:

العدد	نسبي	غير نسبي	جذر أصم	جذر غير أصم
a				
b				
d				
c				

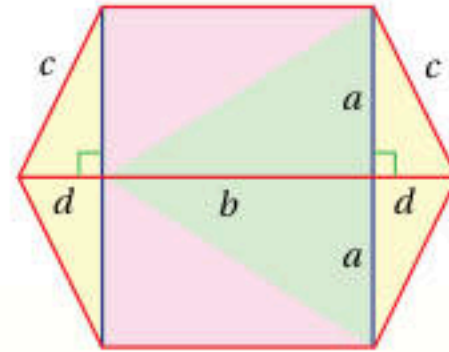
الأدوات اللازمة:



أنبوب تحديد على الزجاج، فرش للتلوين، ألوان زجاج، لوح زجاجي

خطوات تنفيذ المشروع:

أختار قياسات مناسبة للشكل أدناه، ثم أرسمه على الزجاج باتباع الخطوات الآتية:



5 ألون الشكل على الورقة؛ تمهيداً لمحاكاته على الزجاج.

6 أرسم الشكل على الزجاج محافظاً على القياسات التي اخترتها، وألونه.

1 أختار مربعين كاملين يشكل جذراهما بُعدي المستطيل a و b ، ثم أرسم المستطيلين في الأعلى والأسفل على ورقة.

2 أختار جذراً أصمً ليشكل المسافة d ، وأستخدم خط الأعداد لتحديد بدقه. أرسم الضلعين اللذين طول كل منهما d .

عرض النتائج:

تعرض المجموعات زخارفها على الزجاج وجداولها، وتناقش كيفية اختيار الأطوال.

أستكشف

إذا استمر النمط في الشكل الآتي، فما رقم أول شكل يحتوي أكثر من 180 وحدة مربعة؟



الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

الشكل 4

فكرة الدرس

أجد قيمة الجذر التربيعي لعدد، وأستخدمه في حل مسائل حياتية.

المصطلحات

الجذر التربيعي، الجذر التربيعي الرئيس، المجذور

الجذر التربيعي (square root) لعدد ما هو أحد عاملي المتساويين. ولأي عدد موجب جذران تربيعيان، أحدهما موجب والآخر سالب، ويُسمى الموجب منهما **الجذر التربيعي الرئيس** (principal square root). ويستعمل رمز الجذر التربيعي $\sqrt{\quad}$ للدلالة على الجذر التربيعي الرئيس، ويُسمى العدد أسفل الجذر **المجذور** (radicand).

رمز الجذر $\rightarrow \sqrt{a} \leftarrow$ المجذور

لغة الرياضيات

يقرأ الرمز $\pm$ موجباً أو سالباً، ويدل على كلا الجذرين التربيعيين للعدد الموجب.

$\sqrt{64}$ ← الجذر التربيعي الرئيس للعدد 64

$-\sqrt{64}$ ← معكوس الجذر التربيعي الرئيس للعدد 64

$\pm\sqrt{64}$ ← الجذران التربيعيان للعدد 64

مثال 1

أجد كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{36}$

$\sqrt{36} = 6$

أجد الجذر التربيعي الموجب للعدد 36

2 $\pm\sqrt{1.69}$

$\pm\sqrt{1.69} = \pm 1.3$

أجد الجذرين التربيعيين للعدد 1.69

الوحدة 1

3 $-\sqrt{\frac{25}{64}}$

$$-\sqrt{\frac{25}{64}} = -\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = -\frac{5}{8}$$

أجدُ الجذر التربيعي السالب للعدد $\frac{25}{64}$

أتحقق من فهمي:

4 $\sqrt{81}$

5 $-\sqrt{1.96}$

6 $\pm\sqrt{\frac{4}{121}}$

يمكنني استعمال تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب في حل معادلات تتضمن متغيرات مربعة، فإذا كان $n^2 = c$

$$n = \pm\sqrt{c}$$

مثال 2

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

1 $x^2 = 144$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm\sqrt{144}$$

$$= \pm 12$$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

عندما $x = -12$

$$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$$

$$144 = 144 \quad \checkmark$$

عندما $x = 12$

$$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$$

$$144 = 144 \quad \checkmark$$

2 $t^2 = \frac{1}{36}$

$$t^2 = \frac{1}{36}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$= \pm\frac{1}{6}$$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$$

عندما $x = \frac{1}{6}$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \quad \checkmark$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $y^2 = 2.25$

4 $x^2 = \frac{16}{169}$

يُستعمل الجذر التربيعي الموجب عادةً في المواقف الحياتية والعملية.

🌍 **مثال 3: من الحياة**



أهرام: هرم الشمس في المكسيك ثالث أكبر هرم في العالم، قاعدته مربعة الشكل مساحتها 50625 m^2 ، أجد طول ضلع قاعدته.

الخطوة 1 أكتب المسألة على صورة معادلة.

أفرض أن x طول ضلع قاعدة الهرم، وبما أن القاعدة مربعة الشكل، فإن مساحتها تساوي مربع طول الضلع.

$$\begin{aligned} A &= x^2 && \text{مساحة المربع} \\ x^2 &= 50625 && \text{أعوض لأكون معادلة} \end{aligned}$$

الخطوة 2 أبحث عن عاملين متساويين.

لحل المعادلة، أبحث عن عاملين متساويين للعدد 50625، وذلك بتحليله إلى عوامله الأولية:

$$\begin{aligned} 50625 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 && \text{أحلل العدد إلى عوامله الأولية} \\ &= (5 \times 5 \times 3 \times 3) (5 \times 5 \times 3 \times 3) && \text{الخاصية التجميعية} \\ &= 225 \times 225 && \text{أضرب} \end{aligned}$$

الخطوة 3 أجد طول ضلع قاعدة الهرم.

لايجاد طول ضلع قاعدة الهرم أحل المعادلة $x^2 = 50625$

$$\begin{aligned} x^2 &= 50625 && \text{أكتب المعادلة} \\ x &= \pm \sqrt{50625} && \text{تعريف الجذر التربيعي} \\ x &= \pm 225 && \text{أجد قيمة الجذر} \end{aligned}$$

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، إذن، طول ضلع قاعدة الهرم هو $\sqrt{50625}$ ويساوي 225 m



✓ **أتتحقق من فهمي:**

صورةً مربعةً الشكل مساحتها 3136 cm^2 ، أرادت ريمًا وضعها في بروازٍ مربع الشكل طول ضلعه الداخلي 58 cm ، هل يمكنها ذلك؟ أبرّر إجابتي.

أدرب
وأحل المسائل

أجد كلاً ممّا يأتي:

1 $\sqrt{\frac{49}{169}}$

2 $-\sqrt{2.56}$

3 $\pm\sqrt{576}$

4 $\sqrt{0.0001}$

أجد قيمة كل ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

5 $(\sqrt{81})^2$

6 $(-\sqrt{0.01})^2$

7 $\frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{16}}$

8 $\sqrt{0.25+1.44}$

9 $\sqrt{2.61-0.36}$

10 $0.4^2 + \sqrt{1.96}$

إرشاد

أستعمل الحقيقة

$$576 = 4 \times 9 \times 16$$

لحل المسألة 3

أحل كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

11 $t^2 = \frac{64}{100}$

12 $y^2 = 0.0144$

13 $\sqrt{y} = \frac{3}{5}$

إرشاد

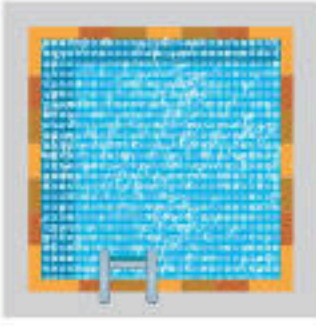
لحل المعادلة في

المسألة 13، أجد مربع

طرفي المعادلة.

بناء: بلط بناء أرضية غرفة مربعة الشكل بـ 75 بلاطة بيضاء و 75 بلاطة صفراء و 75 بلاطة بيضاء. ما عدد البلاطات التي تشكّل طول ضلع قاعدة الغرفة؟ علماً بأن البلاطات جميعها مربعة الشكل ومتساوية في المساحة.

14



15 مسابح: مسبح مربع الشكل، مساحته 169 m^2 ، يحيط به ممر عرضه 1 m . أجد محيط الممر.

أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في لأكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

16 $\sqrt{2.61-0.65}$ 1.6

17 1.3^2 $\sqrt{1.27+1.29}$

18 $\sqrt{0.81}$ 0.9^2

19 $\sqrt{1.24+0.2}$ 1.2

20 أنماط: أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

أفكر

ما العلاقة بين عدد المقاعد على طول ضلع المربع الكبير وعدد المقاعد على طول ضلع المربع الصغير؟

21

تبرير: في حفل تخريج للطلبة في إحدى الجامعات، وزعت المقاعد على 4 أقسام كل منها على شكل مربع فيه العدد نفسه من المقاعد، لتشكل الأقسام الأربعة معاً مربعاً كبيراً. إذا كان في أحد الأقسام 625 مقعداً، فما عدد المقاعد الموضوعة على ضلع المربع الكبير؟ أبرر إجابتي.

22

تبرير: هل يمكن إيجاد $\sqrt{-100}$ ؟ أبرر إجابتي.

23

تحد: قررت مصممة تغطية أرضية مسرح مربعة الشكل بنوع خاص من الخشب سعر المتر المربع الواحد منه 4 JD، فبلغت التكلفة 1024 JD. أجد طول المسرح.

24

اكتشف الخطأ: يقول مالك: إن $\sqrt{64} = \pm 8$ ؛ لأن $(\pm 8)^2 = 64$. هل ما يقوله مالك صحيح؟ أبرر إجابتي.

25

اكتب: كيف أجد الجذر التربيعي لعدد ما؟

أفكر

ما العلاقة بين مساحة أرضية المسرح والتكلفة؟

أستكشف

فكرة الدرس

أقدر قيمة الجذر التربيعي.

المصطلحات

الجزور الصماء، نطاق المقام.

تمثل المعادلة $2\pi s^2 = 9.8 L$ العلاقة بين سرعة سلسلة من الموجات s بالمتري لكل ثانية في المياه العميقة، وطول الموجة L بالمتري. أجد سرعة سلسلة من الموجات طولها الموجي 6 m ؟



الجزور الصماء (surds) هي جذور لا يمكن إيجاد قيمة دقيقة لها، فمثلاً $\sqrt{3}$ جذر أصم لعدم وجود إجابة دقيقة له؛ لأن 3 ليس مربعاً كاملاً، أما $\sqrt{4}$ فيمكن إيجاد قيمة دقيقة له وهي 2 ؛ لأنه مربع كامل، إذن فهو ليس جذراً أصم. ولكن يمكن تقدير قيمة الجذور الصماء باستعمال طرائق عدة منها: خط الأعداد، والآلة الحاسبة.

مثال 1

أقدر قيمة $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح.

الطريقة 1: خط الأعداد

الخطوة 1 أحدد مربعين كاملين يقع بينهما العدد 55 ويكونان أقرب ما يمكن إليه.

• أكبر مربع كامل أقل من 55 هو 49

• أصغر مربع كامل أكبر من 55 هو 64

إذن، العدد 55 يقع بين المربعين الكاملين 49 و 64 ، ويمكن التعبير عن هذه الجملة على النحو الآتي:

$$49 < 55 < 64$$

الخطوة 2 أجد الجذر التربيعي لكل عدد.

أكتب المتباينة

أجد الجذر التربيعي لكل عدد

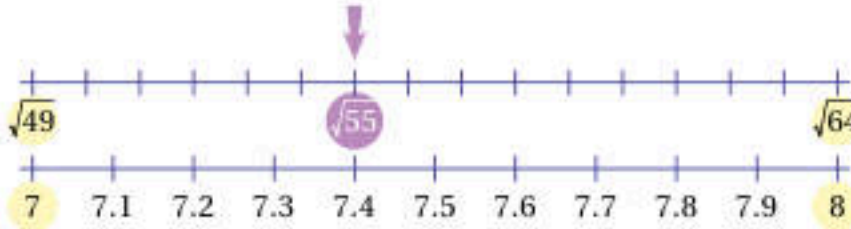
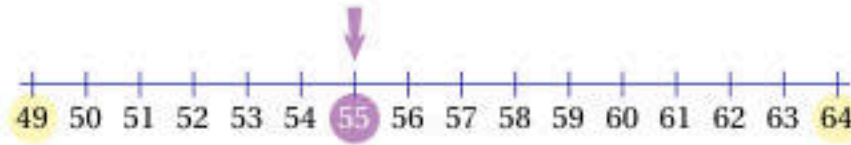
أبسط

$$49 < 55 < 64$$

$$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$$

$$7 < \sqrt{55} < 8$$

الخطوة 3 استعمل خط الأعداد لتحديد أفضل تقدير.



• أعيّن الجذرين على خط الأعداد.

• لاحظ أن 55 أقرب إلى 49 منه إلى 64

إذن، $\sqrt{55}$ أقرب إلى 7 منه إلى 8

لذا فإن أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

الطريقة 2: الآلة الحاسبة

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لتقدير $\sqrt{55}$ بالضغط على الأزرار الآتية:

$\sqrt{}$ 55 s $\leftrightarrow$ d 7.416198487

إذن، أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

✓ اتحقق من فهمي:

أقدر قيمة كل جذر تربيعي مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{83}$

2 $\sqrt{125}$

3 $\sqrt{160}$

يكون المقدار الجذري في أبسط صورة حين لا يحتوي:

- جذراً في المقام.
- مجذوراً أحد عوامله مربع كامل باستثناء العدد 1
- مجذوراً على صورة كسر.

ويمكن تبسيط الجذور التربيعية الصماء باستعمال خواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

• بالرموز:

• مثال:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

أنت تعلم

لتبسيط جذر أصم على الصورة $\sqrt{a}, a \geq 0$ أحلل العدد الواقع تحت رمز الجذر، على أن يكون أحدهما أكبر مربع كامل ممكن، ثم أطبق خاصية ضرب الجذور التربيعية.

وللحصول على مقدار جذري لا يحتوي مقامه جذراً أصم، نضرب البسط والمقام في هذا الجذر الأصم، وتسمى هذه العملية **إنطاق المقام** (rationalizing the denominator).

مثال 2

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{675}$

$$\begin{aligned}\sqrt{675} &= \sqrt{225 \times 3} \\ &= \sqrt{225} \times \sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

أحلل العدد 675 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

2 $\sqrt{\frac{48}{81}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{48}{81}} &= \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

خاصية قسمة الجذور التربيعية
أحلل العدد 48 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

3 $\frac{14}{\sqrt{7}}$

$$\begin{aligned}\frac{14}{\sqrt{7}} &= \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{7} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

أنطق المقام

خاصية ضرب الجذر في نفسه

أبسط

✓ **أتحقق من فهمي:**

4 $\sqrt{192}$

5 $\sqrt{\frac{180}{25}}$

6 $\frac{30}{\sqrt{6}}$

يُستعمل تبسيط الجذور الصّماء وتقديرها في كثير من المواقف الحياتية التي لا يمكن إيجاد إجابة دقيقة لها.

مثال 3: من الحياة



زراعة: اشترى سمير 6 أكياس من السماد الطبيعي يكفي الواحد منها لتغطية مساحة مقدارها 156 m^2 . أقدّر طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه هذه الكمية من السماد.

لتقدير طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه كمية السماد التي اشترىها سمير، أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية، وذلك بضرب عدد الأكياس في مساحة ما يغطيه الكيس الواحد.

الخطوة 1 أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية.

$$6 \times 156 = 936$$

عدد الأكياس $\times$ مساحة ما يغطيه الكيس الواحد

إذن، تغطي كمية السماد كلها مساحة مقدارها 936 m^2

الخطوة 2 أجد طول ضلع مربع الأرض الذي تغطيه كمية السماد كلها.

أفرض أن s طول ضلع مربع الأرض الذي مساحته 936 m^2

$$A = s^2$$

مساحة المربع

$$s = \sqrt{A}$$

طول الضلع يساوي الجذر التربيعي للمساحة

الوحدة 1

أذكر

إيجاد مربع العدد والجذر التربيعي له عمليتان عكسيتان.

$$= \sqrt{936}$$

$$= \sqrt{36 \times 26}$$

$$= \sqrt{36} \times \sqrt{26}$$

$$= 6\sqrt{26}$$

$$A = 936$$

أحلل العدد 936 إلى عاملين أحدهما مربع كامل

خاصية ضرب الجذور التربيعية

أبسط

الخطوة 3 أقدر طول ضلع المربع.

أستعمل الآلة الحاسبة لتقدير طول ضلع المربع:

6

$\sqrt{}$

26

$s \leftrightarrow d$

30.59411708

إذن، طول ضلع مربع الأرض الذي تكفي لتغطيته كمية السماد التي اشتراها سمير 30 m تقريباً.

أتحقق من فهمي:



جسور: تمثل المعادلة $t = \sqrt{\frac{2d}{9.8}}$ العلاقة بين الزمن t بالثواني والارتفاع بالأمتر d الذي سقط منه جسم سقوطاً حراً. أجد الزمن اللازم ليصل جسم إلى سطح الأرض سقط من جسر وادي الغفر في محافظة إربد البالغ ارتفاعه عن سطح الأرض 72 m

يمكن جمع الجذور التربيعية الصماء وطرحها بطريقة مشابهة لجمع الحدود الجبرية وطرحها، بشرط أن يتساوى المجذور في كل منها.

3 $\sqrt{5}$, 5 $\sqrt{3}$ جذران غير متشابهين

3 $\sqrt{5}$, 7 $\sqrt{5}$ جذران متشابهان

مثال 4

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$

$$= 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

أحلل

خاصية ضرب الجذور التربيعية

$$\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$$

أجمع

2 $\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{12} - 6\sqrt{3} &= \sqrt{4 \times 3} - 6\sqrt{3} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= -4\sqrt{3}\end{aligned}$$

أحلل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
 $\sqrt{4} = 2$
أطرح

3 $5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} &= (5+2-3)\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7}\end{aligned}$$

أجمع المعاملات وأطرحها
أبسط

أتحقق من فهمي:



4 $\sqrt{243} + \sqrt{48}$

5 $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

6 $4\sqrt{98} + 5\sqrt{2}$

يمكن تبسيط بعض المقادير العددية التي تحوي جذورًا صماءً وعمليات باستعمال خاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

مثال 5

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(2 - \sqrt{7}) &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{7} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{21}\end{aligned}$$

خاصية التوزيع
خاصية ضرب الجذور التربيعية

2 $(5 + \sqrt{6})^2$

$$\begin{aligned}(5 + \sqrt{6})^2 &= (5 + \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) \\ &= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{6} \\ &= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 6 \\ &= 31 + 10\sqrt{6}\end{aligned}$$

تعريف المربع الكامل
خاصية التوزيع
خاصية ضرب الجذر في نفسه
أجمع

أتحقق من فهمي:



3 $\sqrt{2}(\sqrt{8} - 1)$

4 $(\sqrt{7} - 3)^2$

أدرب وأحل المسائل



أقدر قيمة كل جذر مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{17}$

2 $\sqrt{44}$

3 $\sqrt{70}$

4 $\sqrt{93}$

أكتب كلاً من المقادير العددية الآتية بأبسط صورة:

5 $\sqrt{405}$

6 $\sqrt{\frac{132}{99}}$

7 $\frac{6}{\sqrt{18}}$

8 $(4 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{27})$

9 $4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt{2}$

10 $\frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{81}$

11 $(6 + \sqrt{3})^2$

12 $\sqrt{12} - 43 + 2\sqrt{9}$

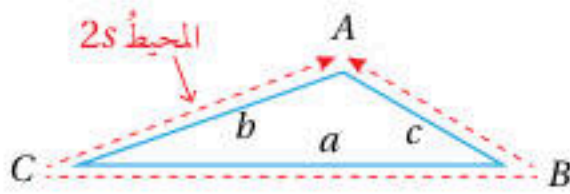
معلومة

يُعدُّ بندول الساعة أحد الاختراعات الإسلامية الكبرى التي غيّرت مسار الحضارة الإنسانية. ومنذُ عُرِفَ البندول تطوّرت آلاتُ حسابِ الوقتِ بسرعة.

13

فيزياء: تمثل الصيغة $\frac{375}{\sqrt{c}}$ عدد التذبذبات الناتجة عن حركة بندول ساعة طوله $\sqrt{c}$ in في الدقيقة، أقدّر عدد تذبذبات بندول إذا كانت $c = 45$ in





مساحة: يمكن حساب مساحة مثلث باستخدام الصيغة $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ، حيث a و b و c أطوال أضلاع المثلث و s نصف المحيط.

معلومة

النسبة الذهبية هي نسبة ثابتة بين كميتين، وتظهر في الطبيعة كثيرًا. ويسمى المستطيل الذي تحقق نسبة طوليه إلى عرضه هذه النسبة مستطيلًا ذهبيًا.

أجد مساحة مثلث أطوال أضلاعه 6 و 8 و 10

14

هل مساحة المثلث الناتجة عن الفرع السابق تمثل جذرًا أصم أم لا؟ أبرر إجابتي.

15



قوقعة: يتكرر وجود المستطيل الذهبي في قوقعة نوتيلوس البحري، إذا علمت أن نسبة طول المستطيل الذهبي إلى عرضه تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، فأقدر قيمة هذه النسبة.

16

مهارات التفكير العليا

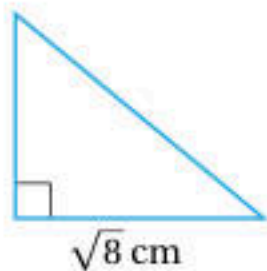
تبرير: أجد قيمة $\sqrt{\square}$ في $(2.8 < \sqrt{\square} < 4)$ ، إذا علمت أن $\square$ عدد صحيح موجب أقل من 10، وأبرر إجابتي.

17

تحذ: أجد الحدين: الأول، والثاني من المتتالية الآتية:

18

____, ____ , $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$, $3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$, $5\sqrt{5} - 8\sqrt{3}$



تبرير: أجد ارتفاع المثلث المجاور الذي مساحته $4 + \sqrt{2} \text{ cm}^2$ بأبسط صورة، وأبرر إجابتي.

19

أتذكر

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

أكتب: كيف أقدر قيمة الجذر التربيعي لعدد؟

20

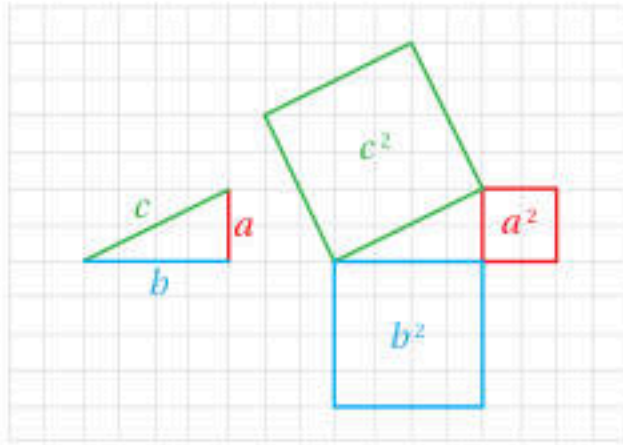


الهدف: استكشف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

نشاط

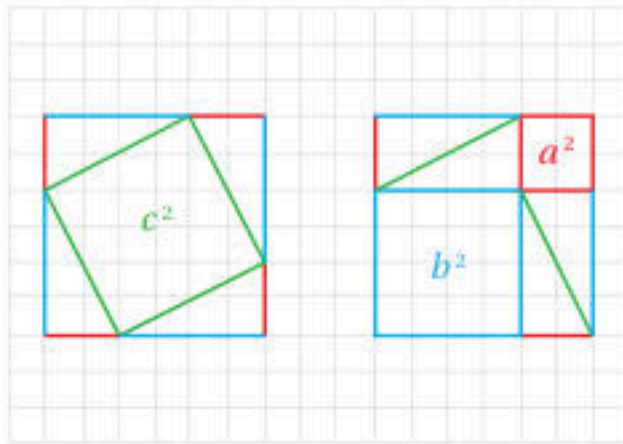
الخطوة 1 أرسم مثلثًا قائم الزاوية.

- أرسم مثلثًا قائم الزاوية على ورقة مربعات، وأسمي أقصر ضلعين a و b والضلع الأطول c ، كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2 أرسم مربعًا على كل ضلع.

- أرسم مربعًا على كل ضلع من أضلاع المثلث، وأسمي مساحات المربعات الثلاثة: a^2 , b^2 , c^2 ، كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3 أقص وأعيد الترتيب.

- أقص المربعات الثلاثة.
- أنسخ من المثلث القائم الزاوية ثماني نسخ، ثم أقصها.
- أعيد ترتيب الأشكال لتكوين مربعين متطابقين كبيرين كما في الشكل المجاور.

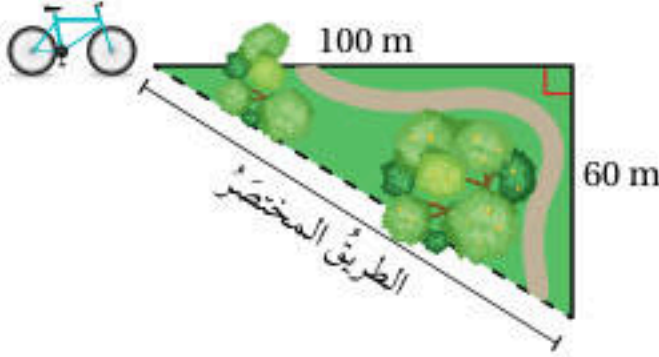
أحلل النتائج:

- معتمدًا المربعين الكبيرين المتطابقين الناتجين من النشاط؛ أصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2
- أستعمل النتيجة التي توصلت إليها في الفرع السابق لكتابة معادلة تصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2

أفكر:

كيف يمكن استعمال المعادلة التي توصلت إليها في إيجاد طول الضلع الأطول في مثلث قائم الزاوية، إذا كان طول ضلعيه الآخرين 6 cm, 8 cm؟

أستكشف



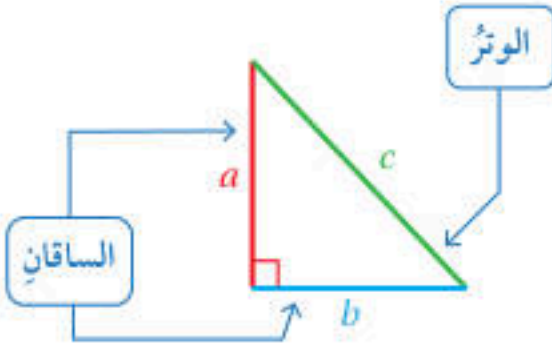
أراد خالد الخروج من الحديقة راكباً دراجته الهوائية ماراً بالطريق المختصر كما يظهر في الشكل المجاور. ما طول الطريق المختصر؟

فكرة الدرس

أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.

المصطلحات

نظرية فيثاغورس، الوتر، الساقان، عكس نظرية فيثاغورس

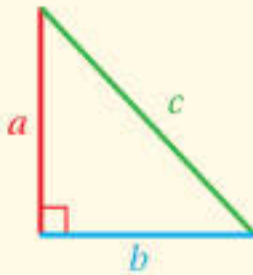


المثلث القائم الزاوية هو مثلث إحدى زواياه قائمة. ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة **الوتر** (hypotenuse)، وهو الضلع الأطول في المثلث. ويسمى الضلعان الآخران **الساقين** (legs)، وهما الضلعان اللذان يشكلان القائمة.

تصف **نظرية فيثاغورس** (pythagorean theorem) العلاقة بين طولي الساقين وطول الوتر في المثلث القائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي



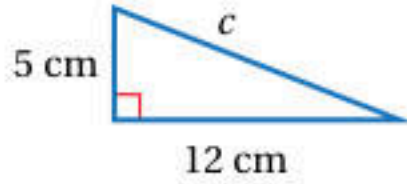
• **بالكلمات:** في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولَي ساقيه.

• **بالرموز:** $c^2 = a^2 + b^2$

يمكن استعمال حل المعادلات ونظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية إذا عُلِمَ طولاً ضلعيه الآخرين.

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

1



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$25 + 144 = c^2$$

$$169 = c^2$$

$$c = \pm \sqrt{169}$$

$$= \pm 13$$

نظرية فيثاغورس

أعوض $a = 5, b = 12$

أجد القوى

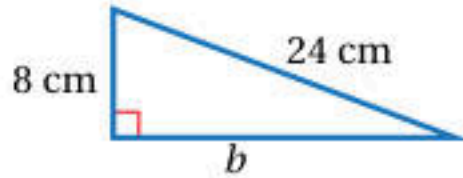
أجمع

تعريف الجذر التربيعي

أبسط

للمعادلة حلان: 13 و -13، وبما أن الطول يجب أن يكون عددًا موجبًا، إذن طول الوتر 13 cm

2



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$8^2 + b^2 = 24^2$$

$$64 + b^2 = 576$$

$$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$$

$$b^2 = 512$$

$$b = \pm \sqrt{512}$$

$$b \approx \pm 22.6$$

نظرية فيثاغورس

أعوض $a = 8, c = 24$

أجد القوى

أطرح 64 من كلا الطرفين

أبسط

تعريف الجذر التربيعي

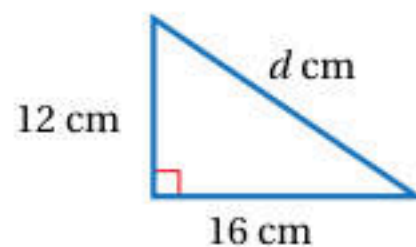
أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول الضلع المجهول b يساوي 22.6 cm

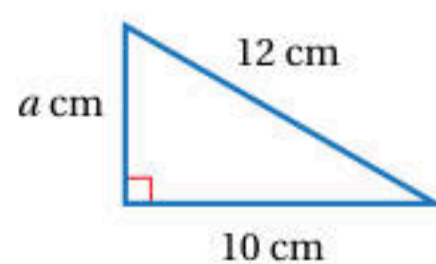
أتحقق من فهمي:



3



4



إنَّ عكسَ نظرية فيثاغورس (converse of pythagorean theorem) صحيحٌ أيضًا، ويُستعملُ لتحديد ما إذا كان المثلثُ المعطاةً أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثة قائمَ الزاوية أم لا.

نظرية فيثاغورس: إذا كان المثلثُ قائمَ الزاوية، فإن $c^2 = a^2 + b^2$

عكسُ نظرية فيثاغورس: إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن المثلثُ قائمَ الزاوية.

عكسُ نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي

- **بالكلمات:** إذا كان مربعُ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ يساوي مجموعَ مربعي طولَي الضلعين الآخرين، فإن المثلثُ قائمُ الزاوية.
- **بالرموز:** إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن المثلثُ قائمُ الزاوية.

مثال 2

أحددُ ما إذا كان المثلثُ المعطاةً أطوالُ أضلاعِهِ في كلِّ ممَّا يأتي قائمَ الزاوية أم لا:

1 12, 9, 15

بما أنَّ أطولَ ضلعٍ طوله 15، فأفرضُ أن $c = 15$ ، و $a = 9$ ، و $b = 12$ ، ثمَّ أحددُ أنَّ هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2$$

$$a = 9, b = 12, c = 15$$

$$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144$$

أجد القوى

$$225 = 225 \quad \checkmark$$

أجمعُ

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$ ، إذن، المثلثُ قائمُ الزاوية.

الوحدة 1

2 3, 5, 6

بما أن أطول ضلع طوله 6، فأفرض أن $c = 6$ ، و $a = 5$ ، و $b = 3$ ، ثم أحدد أن هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$6^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 3^2$$

أعوض $a = 5, b = 3, c = 6$

$$36 \stackrel{?}{=} 25 + 9$$

أجد القوى

$$36 \neq 34$$

أبسط

بما أن $c^2 \neq a^2 + b^2$ ، إذن، المثلث ليس قائم الزاوية.

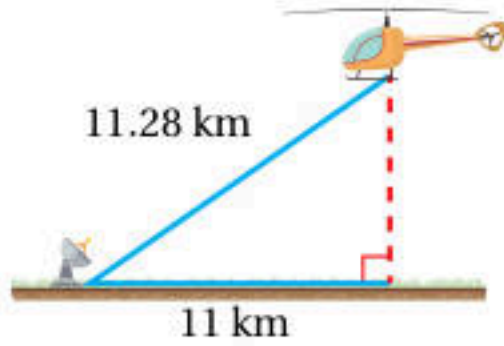
✓ **أتحقق من فهمي:**

3 12, 5, 13

4 24, 18, 25

يمكن استعمال نظرية فيثاغورس في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3: من الحياة



رادار: رصد رادار طائرة مروحية على بُعد 11.28 km منه، كما يظهر في الشكل المجاور. أجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب جزء من العشرة من الكيلومتر.

أفرض أن a هي ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض، ولأيجاد قيمة a أستعمل نظرية فيثاغورس:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$11.28^2 = a^2 + 11^2$$

أعوض $c = 11.28, b = 11$

$$127.2384 = a^2 + 121$$

أجد القوى

$$a^2 = 6.2384$$

أطرح 121 من كلا الطرفين

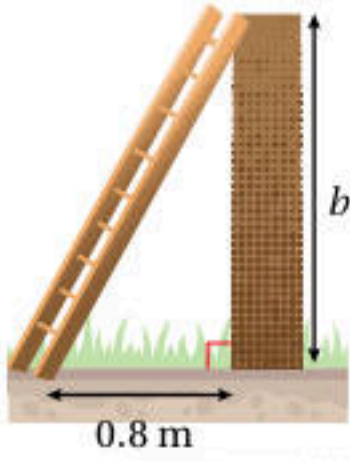
$$a = \pm \sqrt{6.2384}$$

تعريف الجذر التربيعي

$$a \approx \pm 2.5$$

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض 2.5 km تقريباً.



✓ **أتتحقق من فهمي:**

يستند سلم طوله 2 m إلى حائط عمودي، وتبعد قاعدته 0.8 m عن الحائط. أجد ارتفاع أعلى السلم عن الأرض (b).

أُتدرب وأحل المسائل

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

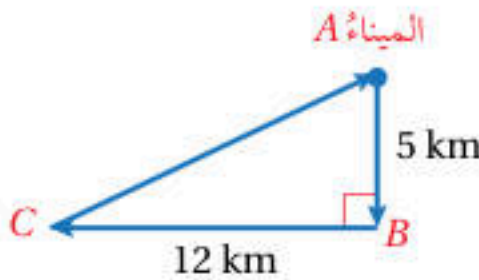
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

أحدد ما إذا كان المثلث المعطاة أطوال أضلاعه في كل مما يأتي قائم الزاوية أم لا:

- 7 3, 4, 6
- 8 12, 35, 37
- 9 4, 8, 9
- 10 11, 60, 61

أتذكر

أفرض أن الضلع الأطول هو c عند التعويض في القاعدة $c^2 = a^2 + b^2$



سُفُن: أبحرت سفينة 5 km من الميناء A باتجاه الجنوب، ثم 12 km باتجاه الغرب، ثم عادت مباشرة إلى الميناء كما في الشكل المجاور:

أجد المسافة التي قطعها السفينة.

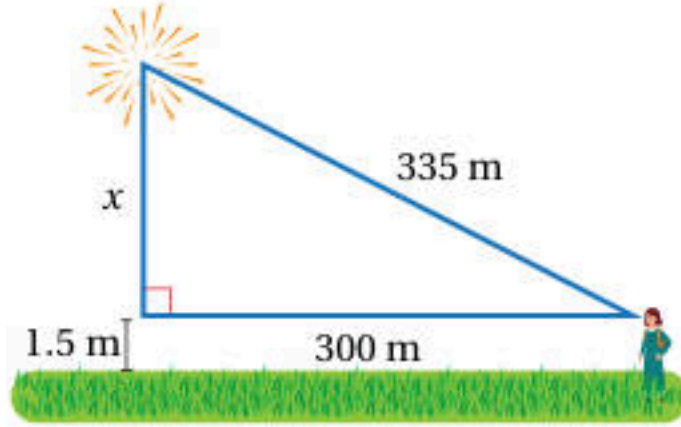
أجد المسافة التي تختصرها السفينة لو أبحرت مباشرة من النقطة A إلى النقطة C ذهاباً وإياباً.

إرشاد

عند إيجاد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض آخذ في الحساب طول المُشاهد للألعاب النارية.

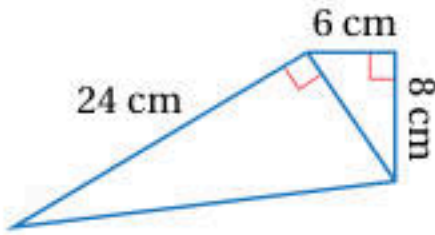
13

ألعاب نارية: رصدت بثينة عرضاً للألعاب النارية على بُعد 335 m مثلما يظهر في الشكل الآتي. أجد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض.



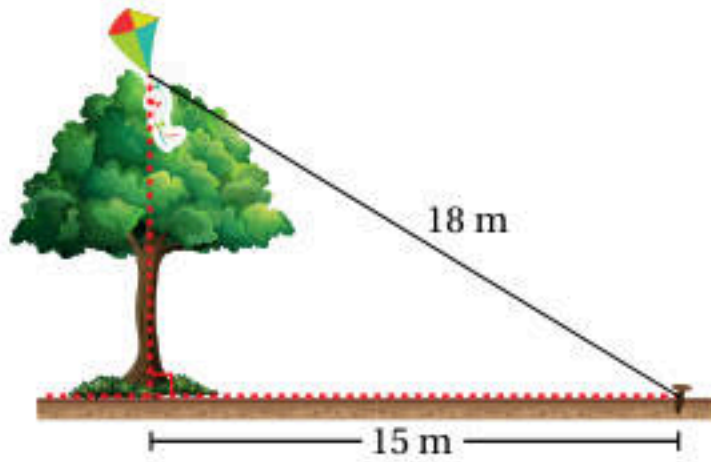
14

أجد محيط الشكل المجاور.



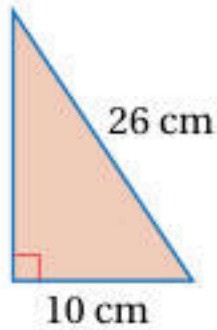
15

علقت طائفة عبد الله الورقية أعلى شجرة، فربط الخيط في وتد على الأرض يبعد 15 m عن قاعدة الشجرة مثلما يظهر في الشكل الآتي. إذا كان طول خيط الطائفة 18 m فأجد ارتفاع الشجرة.



16

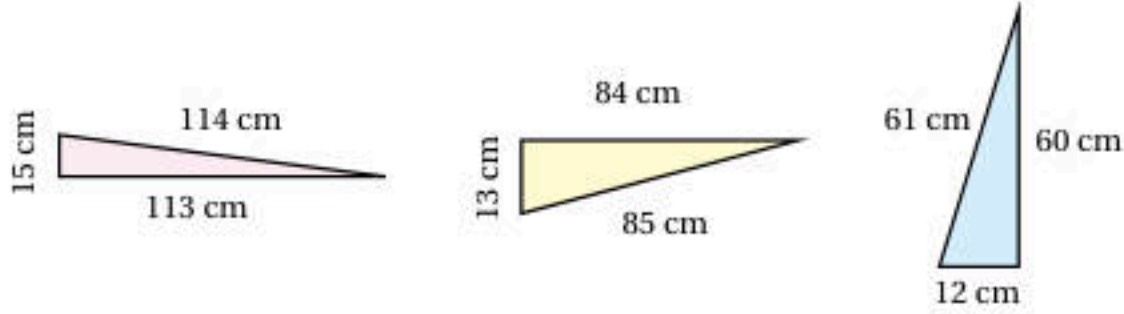
أجد مساحة المثلث المجاور.



17

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

18 **اكتشف المختلف:** أي المثلثات الآتية مختلف؟ أبرر إجابتي:

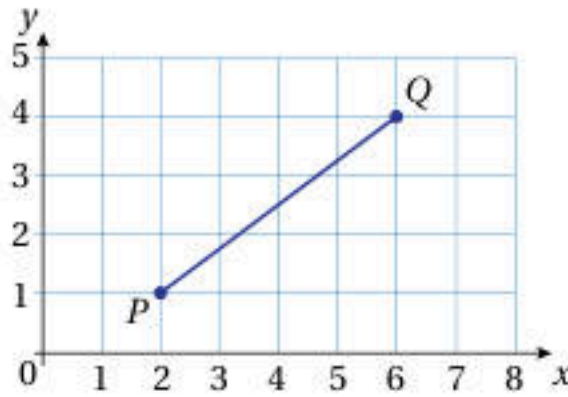


19 **مسألة مفتوحة:** ثلاثيات فيثاغورس هي مجموعات من ثلاثة أعداد موجبة a و b و c تحقق نظرية فيثاغورس؛ أي تشكّل أطوالاً لمثلث قائم الزاوية. مثلاً: 3 و 4 و 5. أجد مجموعتين من ثلاثيات فيثاغورس.

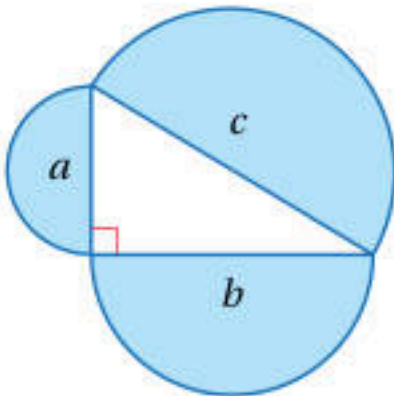
أفكر

هل يمكن استعمال التشابه في إيجاد مجموعات أخرى من ثلاثيات فيثاغورس؟

20 **تحذّر:** في الشكل الآتي، أجد طول PQ من دون استعمال المسطرة.



21 **تبرّر:** أقرن بين مساحة نصف الدائرة الكبيرة ومساحة نصفَي الدائرتين الصغيرتين، وأبرر إجابتي.



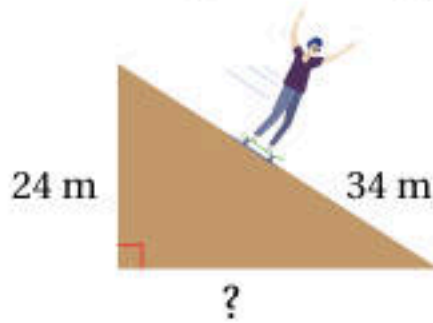
أتذكر

$$A = \pi r^2 \text{ مساحة الدائرة}$$

22 **اكتب:** كيف أجد طول ضلع مجهولاً في مثلث قائم الزاوية باستخدام نظرية فيثاغورس؟

أستكشف

يبيّن الشكل المجاور منظرًا جانبيًا لمنحدرٍ تزلج في مدينة الألعاب:



- 1 أجد طول قاعدة المنحدر.
- 2 هل العدد الذي يمثل طول قاعدة المنحدر عدد نسبي؟ أبرّر إجابتي.

فكرة الدرس

أميّز الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

المصطلحات

العدد غير النسبي، العدد الحقيقي

تعلمت سابقًا أن العدد النسبي عدد يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددين صحيحان، $b \neq 0$ ، وأن الأعداد النسبية جميعها عند كتابتها بالصورة العشرية تكون إما منتهية أو دورية، ومن أمثلتها الجذور التربيعية للمربعات الكاملة. ولكن الجذور الصماء مثل $\sqrt{3}$ لا يمكن تصنيفها أعدادًا نسبية؛ لأنه لا يمكن كتابتها على صورة كسرٍ عشريٍّ مُنتهٍ أو دوريٍّ. وعند استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{3}$ تعطي الآلة الحاسبة القيمة الآتية:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \dots \dots$$

وهذا يعني أنه غير مُنتهٍ وغير دوريٍّ، ويُسمى هذا النوع من الأعداد **الأعداد غير النسبية** (irrational numbers).

الأعداد غير النسبية

مفهوم أساسي

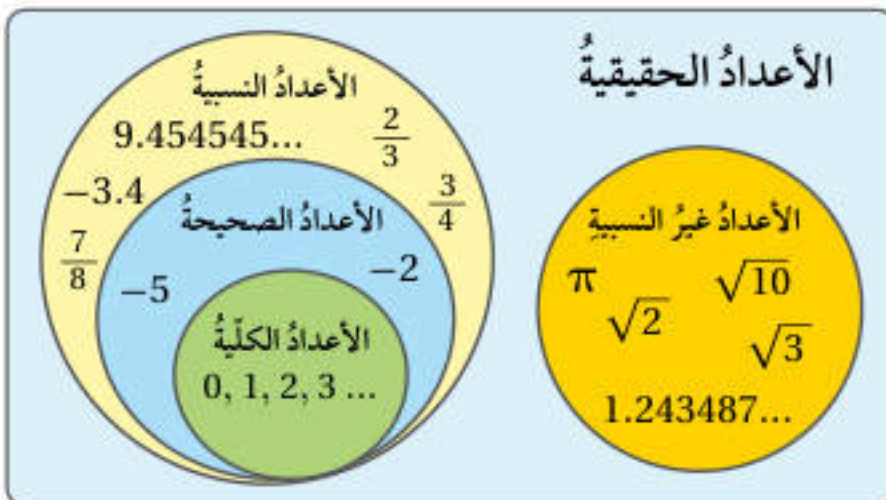
العدد غير النسبي عدد لا يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددين صحيحان، $b \neq 0$

• بالكلمات:

$$\sqrt{5} = 2.236067978 \dots \dots$$

• أمثلة:

$$\pi = 3.141592654 \dots \dots$$



تُشكّل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا **الأعداد الحقيقية** (real numbers)، ويوضح الشكل (فن) المجاور العلاقة بينها.

مثال 1

أصنّف الأعداد الحقيقية الآتية أعدادًا نسبية أو أعدادًا غير نسبية:

1 $\frac{7}{21}$

بما أن 7 و 21 عددان صحيحان، إذن $\frac{7}{21}$ عدد نسبي.

2 $\sqrt{81}$

بما أن $\sqrt{81} = 9$ ، و 9 عدد كلي، إذن $\sqrt{81}$ عدد نسبي.

3 $-\frac{27}{9}$

بما أن $-\frac{27}{9} = -3$ ، و -3 عدد صحيح، إذن $-\frac{27}{9}$ عدد نسبي.

4 0.5555... ..

بما أن 0.5555... .. كسر عشري دوري وغير مُنتهي، إذن هو عدد نسبي.

5 $\sqrt{19}$

بما أن $\sqrt{19} = 4.35889894...$ ، وهو كسر عشري غير دوري وغير مُنتهي، إذن هو عدد غير نسبي.

✓ **أتحقق من فهمي:**

6 $\sqrt{12}$

7 $-\sqrt{64}$

8 0.181818 ...

9 $-3\frac{2}{5}$

تعلمت سابقًا تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد، ويمكنني أيضًا تمثيل بعض الأعداد غير النسبية على خط الأعداد باستعمال المثلث القائم الزاوية.

مثال 2

أمثل $\sqrt{53}$ على خط الأعداد.

الخطوة 1 أبحث عن عددين مجموع مربعيهما 53

$$53 = 49 + 4$$

$$53 = 7^2 + 2^2$$

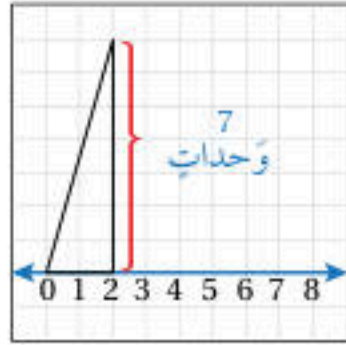
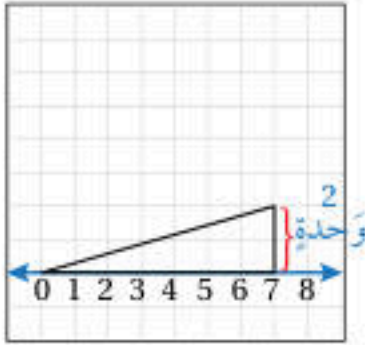
إذن، طول أحد ساقَي المثلث 7 وحدات وطول الآخر 2 وحدة.

الوحدة 1

الخطوة 2 أرسم مثلثاً قائم الزاوية.

• أرسم خطاً أعداد على ورقة مربعات.

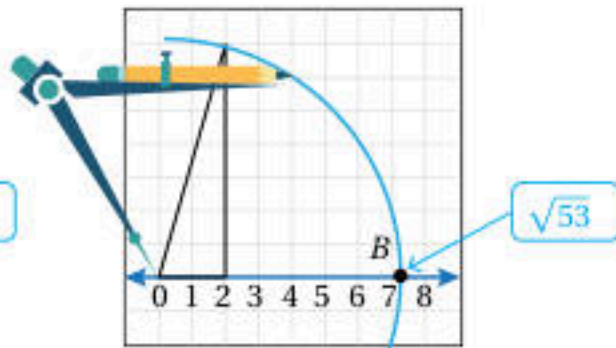
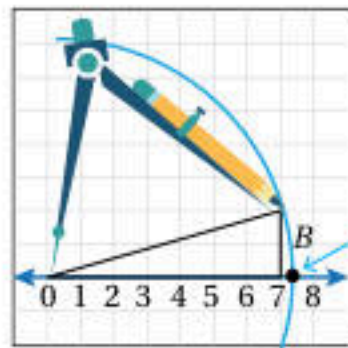
• أرسم مثلثاً قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه 7 وحدات و 2 وحدة. يمكن رسم المثلث بطريقتين مثلما يظهر في الشكل المجاور.



الخطوة 3 أعيّن $\sqrt{53}$ على خط الأعداد.

• أفتح الفرجار فتحة مقدارها طول وتر المثلث.

• أضع رأس الفرجار على 0، وأرسم قوساً يقطع خط الأعداد في النقطة B.



أنحقق من صحة التمثيل:

ألاحظ من التمثيل أن $\sqrt{53} \approx 7.3$ ، وهو يتوافق مع قيمة $\sqrt{53}$ على الآلة الحاسبة وهي:

$$\sqrt{53} \approx 7.280109889$$

أتحقق من فهمي:

أمثل كل عدد غير نسبي مما يأتي على خط الأعداد:

1 $\sqrt{5}$

2 $\sqrt{20}$

3 $\sqrt{45}$

يمكنني المقارنة بين عددين حقيقيين بتحويلهما إلى الصورة العشرية أولاً؛ لتسهيل المقارنة بينهما. ويمكنني استعمال الآلة الحاسبة في ذلك.

مثال 3

أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في $\square$ لأكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

1 $4\sqrt{3} \square \frac{13}{2}$

الخطوة 2 أقرن بين العددين.

بما أن $6.928203... > 6.5$

إذن $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصورة العشرية.

أستعمل الآلة الحاسبة $4\sqrt{3} \approx 6.928203... > 6.5$

$\frac{13}{2} = 6.5$

2 $-\frac{1}{2} \square -\sqrt{2}$

الخطوة 2 أقرن بين العددين.

بما أن $-0.5 > -1.4142...$

إذن $-\frac{1}{2} > -\sqrt{2}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصورة العشرية.

أستعمل الآلة الحاسبة $-\frac{1}{2} = -0.5$

$-\sqrt{2} \approx -1.4142...$

3 $\frac{5}{2} \square \sqrt{6.25}$

الخطوة 2 أقرن بين العددين.

بما أن $2.5 = 2.5$

إذن $\frac{5}{2} = \sqrt{6.25}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصيغة العشرية.

أستعمل الآلة الحاسبة $\frac{5}{2} = 2.5$

$\sqrt{6.25} = 2.5$

أتحقق من فهمي:



4 $\sqrt{0.5} \square 0.9$

5 $-\sqrt{16} \square -\sqrt{18}$

6 $4.5 \square \sqrt{20.25}$

يمكن ترتيب مجموعة من الأعداد الحقيقية تصاعدياً (من الأصغر إلى الأكبر) أو تنازلياً (من الأكبر إلى الأصغر)، وذلك بتحويل كل منها إلى الصورة العشرية أولاً؛ لتسهيل المقارنة بينها وترتيبها.

أرتب الأعداد في كل مما يأتي تصاعدياً:

1 $\frac{11}{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, -1.\bar{7}$

الخطوة 1 أحوّل الأعداد إلى الصورة العشرية.

أحوّل الأعداد إلى الصيغة العشرية باستعمال الآلة الحاسبة:

$$\begin{aligned}\frac{11}{3} &= 3.666666... \\ -\sqrt{3} &= -1.73205... \\ \sqrt{10} &= 3.1622... \\ -1.\bar{7} &= -1.77777... \end{aligned}$$

أتعلم

يسهل تحويل الأعداد إلى الصيغة العشرية المقارنة بين الأعداد القريبة من بعضها، مثل $-\sqrt{3}$ و $-1.\bar{7}$

الخطوة 2 أقرن بين الأعداد، ثم أرتبها تصاعدياً.

الترتيب التصاعدي للأعداد هو:

$$-1.\bar{7}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, \frac{11}{3}$$

أتحقق من فهمي:

2 $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}, -1.4$

3 $-\sqrt{5}, \frac{9}{5}, -2, \sqrt{3}$

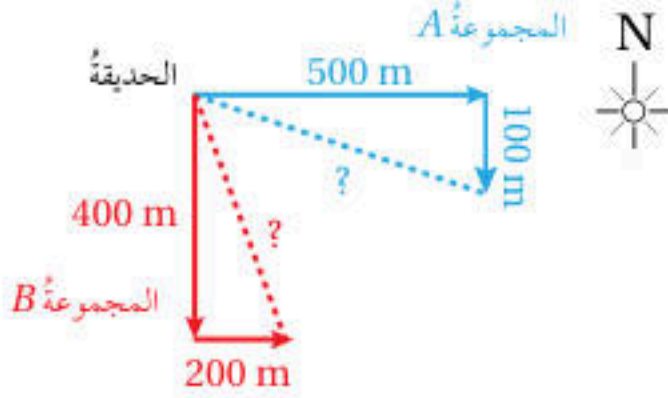
يوجد كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية للأعداد الحقيقية.

مثال 5: من الحياة



كشافة: وقفت المجموعتان A و B من طلبة الكشافة في حديقة الشاطئ الجنوبي في العقبة، ثم بدأت المجموعتان السير في اللحظة نفسها، فسارت المجموعة A باتجاه الشرق 500 m ثم 100 m باتجاه الجنوب. وسارت المجموعة B مسافة 400 m باتجاه الجنوب ثم 200 m باتجاه الشرق. أي المجموعتين هي الأقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي؟

الخطوة 1 أرسم شكلاً تقريبياً يمثل المسألة، وأحدد المطلوب.



- أعتد الاتجاهات والمسافات الموجودة في المسألة لرسم شكل تقريبي يمثل المعطيات.
- ألاحظ أن مساري المجموعتين يصنعان مثلثين قائمي الزاوية.
- لإيجاد أي المجموعتين هي الأقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي، أجد طول وتر كل مثلث، ثم أقارن بين الطولين.

الخطوة 2 أستخدم نظرية فيثاغورس.

- أستخدم نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\
 c^2 &= 500^2 + 100^2 && \text{أعوّض } a = 500, b = 100 \\
 c^2 &= 250000 + 10000 && \text{أجد القوى} \\
 c^2 &= 260000 && \text{أجمع} \\
 c &= \pm \sqrt{260000} && \text{تعريف الجذر التربيعي} \\
 &\approx \pm 509.9 && \text{أستخدم الآلة الحاسبة}
 \end{aligned}$$

إذن، بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي 509.9 m تقريباً.

- أستخدم نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\
 c^2 &= 400^2 + 200^2 && \text{أعوّض } a = 400, b = 200 \\
 c^2 &= 160000 + 40000 && \text{أجد القوى} \\
 c^2 &= 200000 && \text{أجمع} \\
 c &= \pm \sqrt{200000} && \text{تعريف الجذر التربيعي} \\
 &\approx \pm 447.2 && \text{أستخدم الآلة الحاسبة}
 \end{aligned}$$

إذن، بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي 447.2 m تقريباً.

الخطوة 3 أقارن بين المسافتين.

ألاحظ أن المجموعة B أقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي من المجموعة A.

أتحقق من فهمي:

جسم الإنسان: تمثل المعادلة $S = \sqrt{\frac{h \times m}{3600}}$ مساحة سطح جسم الإنسان S بالأمتار المربعة حيث h الطول بالسنتيمترات و m الكتلة بالكيلوغرامات. أجد مساحة سطح جسم شاب طوله 180 cm وكتلته 75 kg . أقرب الإجابة لأقرب جزء من عشرة.

أدرب وأحل المسائل

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

1 $-\frac{2}{3}$

2 $\sqrt{20}$

3 $5.\bar{2}$

4 $\frac{18}{6}$

أمثل كل عدد غير نسبي مما يأتي على خط الأعداد:

5 $\sqrt{10}$

6 $\sqrt{97}$

7 $\sqrt{104}$

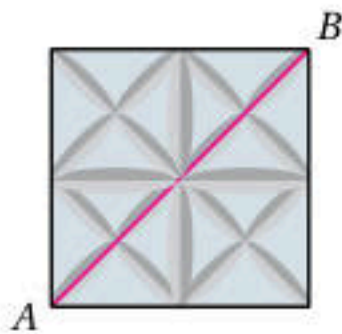
أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في $\square$ لتكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

8 $\sqrt{15} \square 3.9$

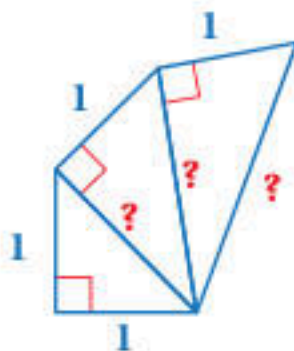
9 $-3.1 \square -\sqrt{9.61}$

10 $\sqrt{36} \square \frac{20}{3}$

11 أرتب مجموعة الأعداد $\sqrt{30}$, 4 , $\frac{21}{4}$, $5.\bar{6}$ تنازلياً.



12 بلاط: يبين الشكل المجاور بلاطة من السيراميك مربعة الشكل طول ضلعها 15 cm ، أجد طول قطر البلاطة، ثم أحدد ما إذا كان العدد نسبياً أم غير نسبي.



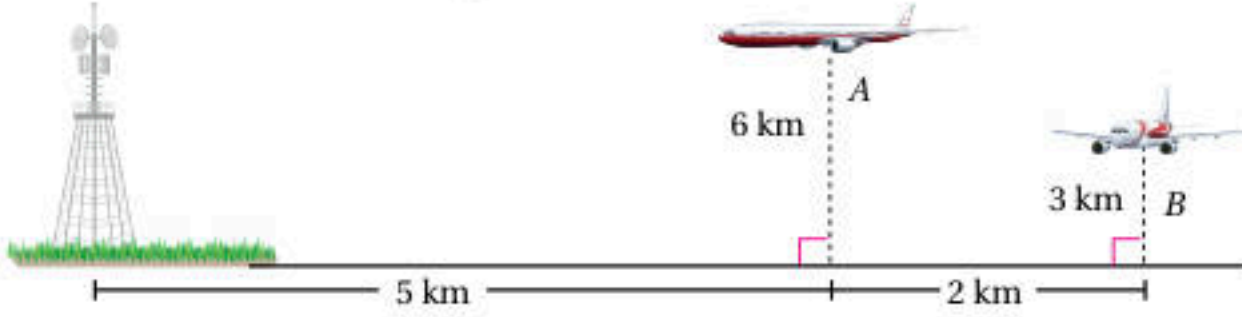
13 أجد أطوال الأضلاع المجهولة في الشكل المجاور.

إرشاد

أستعمل نظرية فيثاغورس في الحل.

14

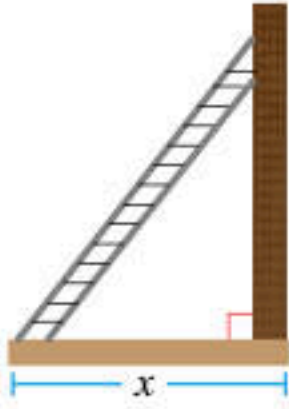
أي الطائرتين في الشكل الآتي أقرب إلى قاعدة البرج؟



15

إجراءات السلامة: لأضع السلم المستند إلى حائط

في وضع آمن، يجب أن يكون طوله $0.3\sqrt{17x^2}$ حيث x بُعد قاعدة السلم عن الحائط بالمتر. إذا كانت قاعدة السلم تبعد عن الحائط 1.5 m، فهل طول السلم عدد نسبي أم غير نسبي؟

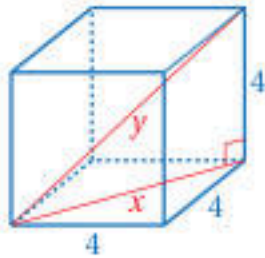


مهارات التفكير العليا

تبرير: أبتن ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم غير صحيحة، مدعماً إجابتي بأمثلة مناسبة:

الجدور التربيعية للأعداد الموجبة أعداد غير نسبية.

العدد الحقيقي عدد نسبي. 18 الأعداد العشرية المنتهية أعداد نسبية.



تحذ: أجد طولَي الضلعين المجهولين في الشكل المجاور بأبسط صورة.

إرشاد

أستعمل الحقيقة (تلتقي أحرف المكعب في زوايا قائمة).

19

أكتشف الخطأ: تقول سماح: إن $\sqrt{5}$ عدد نسبي؛ لأنه يمكن كتابته على الصورة $\frac{\sqrt{5}}{1}$. هل ما تقوله سماح صحيح؟ أبرر إجابتي.

20

مسألة مفتوحة: أعطي مثلاً على عددين نسبيين يقع بينهما عددين غير نسبيين.

21

أكتب: كيف أميز الأعداد النسبية من غير النسبية؟

22



أستكشف

تمثل المعادلة $h = 0.4x^{\frac{1}{3}}$ العلاقة بين ارتفاع الزرافة (h) بالأمتار وكتلتها x بالكيلوغرامات. أجد ارتفاع زرافة كتلتها 343 kg

فكرة الدرس

أربط بين الأسس النسبية والجذور، وأحوّل بينهما.

المصطلحات

الأسس النسبي، الجذر النوني، دليل الجذر.

تعلمت سابقاً الأسس الصحيحة وقوانينها، وسأتعلم في هذا الدرس نوعاً آخر من الأسس تُكتب على صورة كسور تُسمى **الأسس النسبية** (rational exponent).

معلوم أن تربيع عدد موجب وإيجاد الجذر التربيعي لمربعه عمليتان عكسيتان، فمثلاً:

$$3^2 = 9 \longleftrightarrow \sqrt{9} = 3$$

ومنه، فإن العملية العكسية لرفع عدد للأس n هي إيجاد **جذره النوني** (n^{th} root)، ويمكن التعبير عن أي جذر نوني باستعمال الأسس النسبية، فمثلاً يمكننا كتابة $\sqrt{9}$ بطريقة أخرى باستعمال الأسس النسبية هي: $9^{\frac{1}{2}}$ حيث:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

أتعلم

إذا لم يكن هناك دليل للجذر فهذا يعني أن دليل الجذر 2، وهو يدل على الجذر التربيعي.

وبشكل عام، فإن $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ لأي عدد صحيح n أكبر من 1، حيث يُسمى العدد n الموجود على انحناء الجذر **دليل الجذر** (index) وهو يدل على درجة الجذر.

$$\text{رمز الجذر} \longleftarrow \sqrt[n]{a} \xrightarrow{\text{دليل الجذر}} \text{المجذور}$$

الأسس النسبية: $a^{\frac{1}{n}}$

مفهوم أساسي

لأي عدد حقيقي a ، وأي عدد صحيح n ($n > 1$)، فإن $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ، إلا إذا كان $a < 0$ و n عدداً زوجياً فإن الجذر النوني غير معرف.

• بالكلمات:

$$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6, \quad 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

• أمثلة:

مثال 1

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $y^{\frac{1}{4}}$

$$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

2 $\sqrt[6]{w}$

$$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

3 $8^{\frac{1}{5}}$

$$8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

4 $\sqrt[7]{-20}$

$$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أتحقق من فهمي: 

5 $c^{\frac{1}{8}}$

6 $\sqrt[9]{x}$

7 $25^{\frac{1}{10}}$

8 $\sqrt[3]{-12}$

بشكل عام، إذا كان $a^{\frac{1}{n}} = b$ ، فإن ذلك يعني أن العامل b ضرب في نفسه n من المرات فكان الناتج a ، ويمكن استعمال هذا المفهوم لإيجاد قيم عبارات عددية أسية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $196^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} 196^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{196} \\ &= \sqrt{14 \times 14} \\ &= 14 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 196 كحاصل ضرب عامل في نفسه
أجد الجذر التربيعي للعدد

2 $(-64)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} (-64)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{-64} \\ &= \sqrt[3]{-4 \times -4 \times -4} \\ &= -4 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة -64 كحاصل ضرب عامل في نفسه 3 مرات
أجد الجذر الثالث للعدد

الوحدة 1

3 $729^{\frac{1}{6}}$

$$729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729}$$

$$= \sqrt[6]{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 729 كحاصل ضرب عامل في نفسه 6 مرات
أجد الجذر السادس للعدد

✓ **أتحقق من فهمي:**

4 $225^{\frac{1}{2}}$

5 $(-243)^{\frac{1}{5}}$

6 $128^{\frac{1}{7}}$

يمكن تعميم العلاقة بين الأسس النسبية والجذور كما يأتي:

الأسس النسبية: $a^{\frac{m}{n}}$

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** لأي عدد حقيقي a لا يساوي صفراً، وأي عددين صحيحين n, m و $(n > 1)$ فإن
 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة، إلا إذا كان $a < 0$ و n عدداً زوجياً،
فإن الجذر النوني يكون قيمة غير معرفة.

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

• **مثال:**

مثال 3

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $x^{\frac{3}{4}}$

$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

2 $\sqrt[5]{b^2}$

$$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

3 $30^{\frac{5}{6}}$

$$30^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{30^5}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

4 $\sqrt[7]{(-50)^2}$

$$\sqrt[7]{(-50)^2} = (-50)^{\frac{2}{7}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

✓ **أتحقق من فهمي:**

5 $d^{\frac{5}{2}}$

6 $\sqrt[4]{b^7}$

7 $18^{\frac{9}{5}}$

8 $\sqrt[3]{(-16)^8}$

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية في إيجاد قيم عبارات عددية أسية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 4

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $(-8)^{\frac{4}{3}}$

$$(-8)^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^4$$

$$= (-2)^4$$

$$= 16$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[3]{(-8)} = \sqrt[3]{(-2 \times -2 \times -2)} = -2$$

أبسط

2 $(\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}}$

$$(\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{\frac{4}{9}})^5$$

$$= (\frac{2}{3})^5$$

$$= \frac{32}{243}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}$$

أبسط

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $(32)^{\frac{3}{5}}$

4 $(-\frac{27}{64})^{\frac{2}{3}}$

لأسس النسبية تطبيقات كثيرة في الحياة العملية.

مثال 5: من الحياة



أحياء: تمثل العلاقة $h = 62.5 \sqrt[3]{t} + 75.8$ ارتفاع كتف ذكّر الفيل الآسيوي h بالسنتيمترات، حيث t عُمر الفيل بالسنوات. أجد ارتفاع كتف فيل عُمره 27 سنة بالأمتار.



بما أن العلاقة تعطي ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات، إذن، أجد أولاً ارتفاع الكتف بالسنتيمترات، ثم أحوله إلى الأمتار.

الخطوة 1 أجد ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات.

$$h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$$

العلاقة الأصلية

$$= 62.5\sqrt[3]{27} + 75.8$$

أعوض $t = 27$

$$= 62.5(3) + 75.8$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$= 263.3$$

أبسط

إذن، ارتفاع كتف الفيل 263.3 cm

الخطوة 2 أجد ارتفاع كتف الفيل بالأمتار.

بما أن كل 1 m يساوي 100 cm، إذن، ارتفاع كتف الفيل بالأمتار 2.633 m

أتحقق من فهمي:



تكنولوجيا: تصنع شركة شرائح ذاكرة صغيرة لوحدات تخزين البيانات المتنقلة (USB)، إذا استعملت الصيغة $c = 84(n)^{\frac{2}{3}} + 910$ لحساب التكلفة c بالدينار لإنتاج n شريحة، فأجد تكلفة إنتاج 125 شريحة ذاكرة.



أدرب
وأحل المسائل



أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $p^{\frac{1}{6}}$

2 $\sqrt[8]{u}$

3 $9^{\frac{1}{4}}$

4 $\sqrt[5]{-8}$

5 $w^{\frac{8}{3}}$

6 $\sqrt[6]{v^5}$

7 $16^{\frac{3}{4}}$

8 $\sqrt[5]{(-35)^9}$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

9 $32^{\frac{1}{5}}$

10 $256^{\frac{1}{4}}$

11 $(-125)^{\frac{1}{3}}$

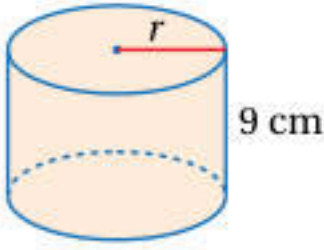
12 $4096^{\frac{1}{6}}$

13 $(16)^{\frac{3}{4}}$

14 $(-\frac{1}{32})^{\frac{2}{5}}$

15 $(\frac{9}{4})^{\frac{5}{2}}$

16 $(-\frac{27}{8})^{\frac{5}{3}}$



أتذكّر

يُستعمل القانون

$$V = \pi r^2 h$$

حجم الأسطوانة، حيث h ارتفاع الأسطوانة، و r طول نصف قطرها.

17

هندسة: أجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة المجاورة إذا كان حجمها يساوي $1332 \pi \text{ cm}^3$

18

يمكن تقدير معدل الطاقة التي تستهلكها المخلوقات الحية اعتمادًا على كتلة الجسم باستعمال المعادلة $R = 73.3 \sqrt[4]{M^3}$ التي تمثل العلاقة بين معدل الطاقة المستهلكة يوميًا R بوحدة السرعات الحرارية وكتلة الجسم M بالكيلوغرامات. أجد معدل الطاقة التي يستهلكها يوميًا خروف كتلته 16 kg

19



تُصنّع المسامير القياسية التي يتوافق طولها مع طول نصف قطرها لتتحمل الطرق وفق المعادلة $l = 54d^{\frac{3}{2}}$ التي تربط بين طول مسمار قياسي l بالإنشات وطول نصف قطره d بالإنشات أيضًا. أجد طول مسمار قياسي طول نصف قطره 0.09 in

20

أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

21

أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل الآتي، وأصححه.

$$\begin{aligned} \times \quad 27^{\frac{2}{3}} &= (27^{\frac{1}{3}})^2 \\ &= 9^2 \\ &= 81 \end{aligned}$$

22

تبرير: أجد قيمة $\sqrt{4^3} - \sqrt{4}$ بأبسط صورة، وأبرّر إجابتي.

23

مسألة مفتوحة: أجد عبارتين مختلفتين على صورة $x^{\frac{1}{n}}$ بحيث تكون أبسط صورة لهما $2x^3$

24

أكتب: كيف أحول بين الأسس النسبية والجذور؟

أستكشف



يبيّن الشكل المجاور صندوقًا خشبيًا مصممًا على شكل متوازي مستطيلات طوله $x^{\frac{1}{2}}$ وحدة، وعرضه $x^{\frac{1}{3}}$ وحدة، وارتفاعه $x^{\frac{1}{4}}$ وحدة، كيف أجّد حجم الصندوق بدلالة المتغير x ؟

فكرة الدرس

استعمال ضرب الأسس النسبية وقسمتها في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا نسبية وتبسيطها.

تعلمت سابقًا مجموعة من قوانين الأسس الصحيحة:

قوانين الأسس الصحيحة

مراجعة المفهوم

إذا كان a و b عددين حقيقيين و n و m عددين صحيحين، فإن:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ضرب القوى

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

قسمة القوى

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

قوة القوة

$$(ab)^n = a^n b^n$$

قوة ناتج الضرب

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

قوة ناتج القسمة

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

الأس الصفرى

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

الأس السالبة

يظهر في بعض الأحيان قانون قوة ناتج القسمة على الصورة $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ الذي يمكن كتابته باستعمال قوة موجبة على الصورة $\left(\frac{b}{a}\right)^n$. وبصورة عامة، لأي عددين a و b حيث $a, b \neq 0$ و n عدد صحيح فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

تنطبق جميع قوانين الأسس أعلاه على الأسس النسبية، ويمكن استعمالها لإيجاد قيمة مقدار عددي يحوي أسسًا نسبية.

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

1 $64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$

$$\begin{aligned} 64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} &= (2^6)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{6}{5} + \frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{10}{5}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$64 = 2^6$$

قاعدة قوة القوة

قاعدة ضرب القوى

أجمع

أبسط

2 $\sqrt[3]{125 \times 5^6}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{125 \times 5^6} &= (125 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^3 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^9)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

$$125 = 5^3$$

قاعدة ضرب القوى

قاعدة قوة القوة

أبسط

أفكر

هل يمكن حل
الفرع 2 من المثال
بطريقة أخرى؟

3 $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}} &= \frac{81^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{(3^4)^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{3^{\frac{4}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} = (3)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= 3^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

$$81 = 3^4$$

قاعدة قوة القوة

قاعدة قسمة القوى

أبسط

الصورة الجذرية

أفكر

يلزم توحيد مقامات
الأسس النسبية قبل
طرحها.

الوحدة 1

أفكار

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية لحل المسألة 4 حيث:

$$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \text{ قاعدة}$$

قاعدة قوة ناتج القسمة

$$27 = 3^3, 8 = 2^3$$

قاعدة قوة القوة

أبسط

أتحقق من فهمي:



$$5 \quad 32^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$6 \quad \sqrt[4]{81 \times 2^4}$$

$$7 \quad \frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}$$

$$8 \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$$

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا كانت الأسس النسبية موجبة وبأبسط صورة في كل من البسط والمقام، ولا يظهر الأساس الواحد أكثر من مرة، وللحصول على ذلك استعمل قوانين الأسس عند تبسيط العبارات الأسية النسبية.

العبارات الأسية في أبسط صورة

مفهوم أساسي

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا:

- ظهر كل أساس مرة واحدة وكانت الأسس جميعها موجبة، وصحيحة في المقام.
- لم تتضمن العبارة قوة القوى.
- كانت الكسور والجذور جميعها في أبسط صورة.

مثال 2

أبسط كلاً من العبارات الأسية الآتية مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1 $y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}$

$$y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}} = y^{-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}}$$

$$= y^{\frac{3}{3}}$$

$$= y$$

قاعدة ضرب القوى

أجمع الأسس

أبسط

2 $\frac{w^{\frac{7}{2}}}{w^3}$

$$\frac{w^{\frac{7}{2}}}{w^3} = (w)^{\frac{7}{2}} \times w^{-3}$$

$$= (w)^{\frac{7}{2} - 3}$$

$$= w^{\frac{1}{2}}$$

قاعدة الأسس السالبة

قاعدة ضرب القوى

أبسط

3 $(b^{\frac{3}{7}})^7$

$$(b^{\frac{3}{7}})^7 = b^{\frac{3}{7} \times 7}$$

$$= b^3$$

قاعدة قوة القوة

أبسط

أتحقق من فهمي: 

4 $y^{\frac{4}{5}} \times y^{-\frac{9}{5}}$

5 $\frac{u^{-\frac{7}{2}}}{u^{-4}}$

6 $(d^{-\frac{2}{3}})^6$

يمكنُ توظيفُ قوانينِ ضربِ الأسسِ النسبية وقسمتها في مواقف حياتية متنوعة.



مثال 3: من الحياة



يمكنُ حسابُ مساحةِ سطحِ جسمِ الحيواناتِ الثديية بالصيغة $S = 9.75 m^{\frac{2}{3}}$ حيثُ S مساحةُ السطحِ بالسنتيمتر المربع، و m كتلةُ الحيوانِ بالغرام. أجدُ مساحةَ سطحِ جسمِ أرنبٍ كتلته 3.4×10^3 غرامًا، وأقربُ الإجابة لأقرب عدد صحيح.

لإيجادِ مساحةِ سطحِ جسمِ الأرنبِ أعوضُ كتلته في الصيغة:

$$S = 9.75 m^{\frac{2}{3}}$$

الصيغة الأصلية

$$S = 9.75 \times (3.4 \times 10^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$m = 3.4 \times 10^3 \text{ أعوض}$$

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times (10^3)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدة ضرب القوى

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times 10^2$$

قاعدة قوة القوة

أستعملُ الآلة الحاسبة:

$$9.75 \times 3.4 \times (2 \div 3) \times 10 = 2204.570003$$

إذن، مساحةُ سطحِ جسمِ الأرنبِ 2205 cm^2 تقريبًا.

أتحقق من فهمي:



تمثلُ المعادلة $A = (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}}$ مساحةَ سطحِ كرةٍ بالوحداتِ المربعة تَمَّ تشكيلها باستعمالِ مجموعةٍ من كراتٍ صغيرةٍ حجمُ الواحدة منها V وحدة مكعبة. أجدُ مساحةَ السطحِ الخارجي للكرة الكبيرة إذا كان حجمُ الكرة الصغيرة 9 وحدات مكعبة.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

1 $25^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

2 $\sqrt[6]{64 \times 3^{12}}$

3 $\frac{9^{\frac{5}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

4 $\frac{\sqrt[3]{216}}{36^{-\frac{3}{2}}}$

5 $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$

6 $\left(\frac{2187}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$

أبسط كلاً من العبارات الآتية مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

7 $p^{-\frac{3}{4}} \times p^{\frac{11}{4}}$

8 $\frac{u^{-\frac{8}{3}}}{u^{-3}}$

9 $y^6(y^{\frac{3}{2}})^{-2}$

10 $\frac{1}{n^2}y^{-2}(n^{\frac{5}{3}})^6$

11 $\frac{w^2 \times w^{-\frac{9}{2}}}{w^{-3}}$

12 $d^{-\frac{1}{2}} \times d^{-\frac{3}{2}}$



أعاصير: يستعمل العلماء المعادلة

$$s = \sqrt{9.8d}$$

بالمتر لكل ثانية في أثناء إعصار تسونامي،

حيث d عمق الماء بالأمتار. أقدّر سرعة

الموجة حين يكون عمق الماء 4000 m

معلومة

تسونامي هو مجموعة من الأمواج الكبيرة جداً تنتج من تحرك كمية هائلة من مياه المحيطات بفعل الظواهر المفاجئة، مثل الزلازل.

الوحدة 1

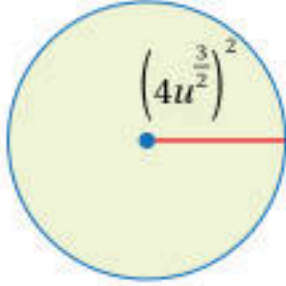
أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأجدُ:

حجم الصندوق بدلالة x .

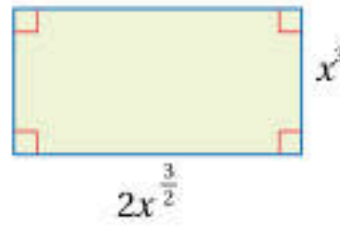
مساحة المساحة الكلية لسطح الصندوق إذا كانت $x = 4096$

هندسة: أجدُ مساحة كل شكل مما يأتي:

16



17



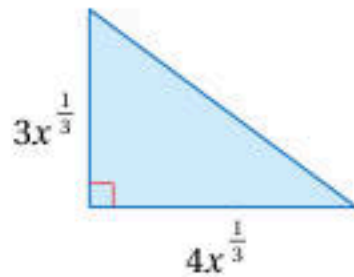
مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب 4 مقادير مكافئة للمقدار $(x^{2/3})^3$

أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل الآتي، وأصححه:

$$\begin{aligned} (-81)^{3/4} &= ((-81)^{1/4})^3 \\ &= (-3)^3 \\ &= -27 \end{aligned}$$

تحدّ: أجدُ محيط المثلث في الشكل الآتي.



أفكر

كيف أجد طول الضلع الثالث في المثلث لأجد المحيط؟

أكتب: كيف أستعمل قوانين الأسس النسبية في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا

نسبية وتبسيطها؟



أستكشف

الأحماض النووية (DNA) هي جزيئات مسؤولة عن تخزين المعلومات الوراثية في الكائنات الحية، ويبلغ قطرها 0.000000002 m تقريبًا. هل توجد طريقة أخرى لكتابة هذا العدد بحيث تصبح قراءته أسهل؟

فكرة الدرس

اكتب الأعداد الكلية والعشرية بالصيغة العلمية، وأجري عمليتي الضرب والقسمة عليها.

المصطلحات

الصيغة العلمية

أذكر

تسمى الصيغة التي تكتب بها الأعداد من دون استعمال الأسس الصيغة القياسية.

الصيغة العلمية (scientific notation) هي طريقة لكتابة الأعداد الكبيرة جدًا أو الصغيرة جدًا على صورة حاصل ضرب عددين أحدهما أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10، والآخر أحد قوى العدد 10

الصيغة العلمية

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** يُكتب العدد بالصيغة العلمية على الصورة $a \times 10^n$ ، حيث $1 \leq a < 10$ ، n عدد صحيح.

• **أمثلة:** 6.35×10^4 ، 1.9×10^{-3} ، 2×10^8

مثال 1

اكتب كل عدد في ما يأتي بالصيغة العلمية:

1 12300000

الخطوة 1 أحرك الفاصلة العشرية.

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليسار حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

1 2 3 0 0 0 0 0 .

1.23

أحرك الفاصلة العشرية 7 منازل إلى اليسار

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 1.23

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 7 منازل إلى اليسار؛ فإن $n = 7$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^7

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$12300000 = 1.23 \times 10^7$$

2 0.000729

الخطوة 1 أحرك الفاصلة العشرية.

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليمين حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

$$\begin{array}{r} 0.000729 \\ \hline 7.29 \end{array}$$

أحرك الفاصلة العشرية 4 منازل إلى اليمين

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 7.29

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 4 منازل لليمين؛ فإن $n = -4$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^{-4}

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$0.000729 = 7.29 \times 10^{-4}$$

أتحقق من فهمي:



3 7864

4 4277.38

5 0.00000874

6 0.002

التذكير

يُسمى عدد مرات تكرار الضرب الأس، ويُسمى كل من الأساس والأس معاً قوة.

ويمكننا أيضًا تحويل الأعداد من الصيغة العلمية إلى الصيغة القياسية.

مثال 2

اكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة القياسية:

1 7.51×10^5

الخطوة 1 أستخدم أس العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة.

أس العدد 10 هو 5، إذن $n = 5$ ، وبما أن $n > 0$ ، إذن أحرك الفاصلة العشرية 5 منازل لليمين.

أعلم

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليمين عددًا من المنازل يساوي قيمة n ، أما إذا انتهت المنازل العشرية في العدد العشري، فأضع صفرًا أو أكثر يمين آخر رقم حتى يكتمل العدد المطلوب من المنازل.

$$7.51 \times 10^5 \longrightarrow 7.51000$$

إذن، العدد 7.51×10^5 بالصيغة القياسية هو 751000

2 6.8×10^{-8}

الخطوة 1 أستخدم أس العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة.

أس العدد 10 هو -8، إذن $n = -8$ ، وبما أن $n < 0$ ، إذن أحرك الفاصلة العشرية 8 منازل لليسار.

أعلم

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليسار عددًا من المنازل يساوي قيمة n ، أما إذا انتهت المنازل العشرية في العدد العشري، فأضع صفرًا أو أكثر يسار آخر رقم حتى يكتمل العدد المطلوب من المنازل.

$$6.8 \times 10^{-8} \longrightarrow 0.000000068$$

إذن، العدد 6.8×10^{-8} بالصيغة القياسية هو 0.000000068

أتحقق من فهمي: ✓

3 6.432×10^6

4 3.45×10^{-2}

5 7×10^{-4}

6 8×10^3

الوحدة 1

يمكن مقارنة الأعداد المكتوبة بالصيغة العلمية وترتيبها، وذلك بمقارنة أسس العدد 10 أولاً، ثم مقارنة الجزء العشري.

مثال 3

أرتب الأعداد في كل مما يأتي تصاعدياً:

1 3.9×10^6 , 4.2×10^5 , 3.8×10^6

الخطوة 2 أقرن الجزء العشري.

الأكبر

3.9×10^6

3.8×10^6

بما أن $3.9 > 3.8$
إذن، 3.9×10^6 هو الأكبر.

الخطوة 1 أقرن بين أسس العدد 10

3.9×10^6

الأصغر

4.2×10^5

3.8×10^6

بما أن $10^5 < 10^6$
إذن 4.2×10^5 هو الأصغر.

إذن، الترتيب التصاعدي للأعداد الثلاثة هو:

4.2×10^5 , 3.8×10^6 , 3.9×10^6

أتحقق من فهمي:

2 7.8×10^{-3} , 7.9×10^{-3} , 5.6×10^{-4}

يمكن استعمال الصيغة العلمية لتسهيل عملية ضرب الأعداد الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً وقسمتها.

مثال 4

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7)$

$(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7) = (3.4 \times 6)(10^{-4} \times 10^7)$

$= 20.4 \times 10^3$

$= (2.04 \times 10^1) \times 10^3$

$= 2.04 \times 10^4$

الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية

قاعدة ضرب القوى

$20.4 = 2.04 \times 10^1$

قاعدة ضرب القوى

2 $(6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^7)$

$$\begin{aligned} (6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^7) &= \frac{(6.561 \times 10^{-4})}{(7.29 \times 10^7)} \\ &= \left(\frac{6.561}{7.29} \right) \left(\frac{10^{-4}}{10^7} \right) && \text{الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية} \\ &= 0.9 \times 10^{-11} && \text{قاعدة قسمة القوى} \\ &= (9 \times 10^{-1}) \times 10^{-11} && 0.9 = 9 \times 10^{-1} \\ &= 9 \times 10^{-12} && \text{قاعدة ضرب القوى} \end{aligned}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $(5.6 \times 10^{11})(2.8 \times 10^{-14})$

4 $(1.305 \times 10^5) \div (1.45 \times 10^8)$

تُستعمل الصيغة العلمية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 5: من الحياة



البكسل: البكسل هو أصغر عنصر يمكن رؤيته في الصورة الرقمية على الشاشات، وهو على شكل مستطيل طوله 2×10^{-2} cm وعرضه 7×10^{-3} cm أجد مساحة البكسل بالصيغتين: القياسية، والعلمية.

$A = l \times w$ قانون مساحة المستطيل الذي طوله l وعرضه w

$A = (2 \times 10^{-2}) (7 \times 10^{-3})$ أعوض $l = 2 \times 10^{-2}$ و $w = 7 \times 10^{-3}$

$= (2 \times 7) (10^{-2} \times 10^{-3})$ الخاصيتان: التبديلية، والتجميعية

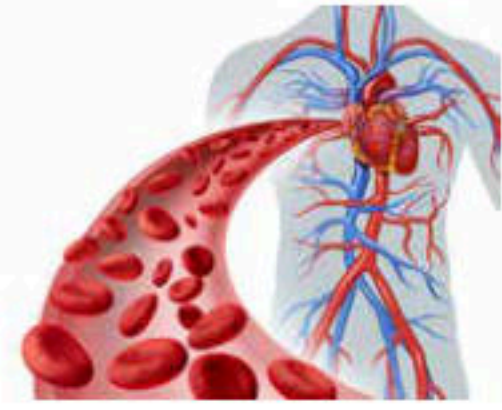
$= 14 \times 10^{-5}$ قاعدة ضرب القوى

$= (1.4 \times 10^1) \times 10^{-5}$ $14 = 1.4 \times 10^1$

$= 1.4 \times 10^{-4}$ قاعدة ضرب القوى

$= 0.00014$ الصيغة القياسية

إذن، مساحة البكسل بالصيغة القياسية 0.00014، وبالصيغة العلمية 1.4×10^{-4}



✓ **أتحقق من فهمي:**

يحتوي جسم الإنسان البالغ 20 000 000 000 000 خلية دم حمراء تقريباً
وكتلة الخلية الواحدة 1 g 0.000 000 000
أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية، ثم أجد كتلة خلايا الدم الحمراء
جميعها لدى الإنسان البالغ.

أدرب
وأحل المسائل

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة العلمية:

1 250

2 20 780 000 000

3 56.0045

4 0.00076

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة القياسية:

5 2.46×10^2

6 8.97×10^5

7 5.67×10^{-4}

8 2.0789×10^{-2}

أرتب الأعداد الآتية تصاعدياً:

6.25×10^{-1} , 2.8×10^5 , 4.5×10^5 , 2.07×10^{-2} , 6.3×10^{-1}

أجد ناتج كل مما يأتي:

10 $(7.3 \times 10^{-3})(4 \times 10^2)$

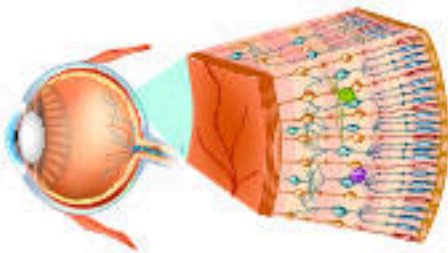
11 $(2 \times 10^{-2})^3$

12 $(4.8 \times 10^4) \div (3 \times 10^4)$

13 $\sqrt{(36 \times 10^{-4})}$

معلومة

تعمل شبكية العين على
تحويل الأشعة الضوئية
إلى نبضات عصبية
(كهروكيميائية) تُنقل عبر
العصب البصري إلى مراكز
الدماغ العليا لتحويلها إلى
صور للأشياء المرئية.



تسريع: تحتوي شبكية العين خلايا مستقبلية
للضوء وحساسة له تُسمى عَصَيًا ومخاريط، إذ
يبلغ عدد العصي في الشبكية 120000000،
وعدد المخاريط 6000000، أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية.

15 يُبين الجدول الآتي أبعاد بعض الكواكب عن الشمس، أرتب هذه الأبعاد تنازلياً.



بُعد الكوكب عن الشمس						
المشتري	الزهرة	عطارد	نبتون	المريخ	الأرض	الكوكب
4.84×10^8	6.7×10^7	3.6×10^7	2.8×10^9	1.42×10^8	9.3×10^7	البعد بالأميال



معلومة

الولفية نوع من عدسيات الماء، وتعد أصغر النباتات المزهرة، وتتكاثر بسرعة كبيرة لتحوّل سطح الماء إلى ما يشبه المرج الأخضر.

16 **كثافة سكانية:** تُحسب الكثافة السكانية لمنطقة ما بقسمة عدد السكان على مساحة هذه المنطقة. في شهر آب من عام 2020 كان عدد سكان الأرض 7.8×10^9 نسمة. إذا كانت مساحة سطح اليابسة على الأرض $1.438 \times 10^9 \text{ km}^2$ ، فأجد الكثافة السكانية لسكان الأرض على اليابسة.

17 **نباتات:** تبلغ كتلة الولفية (Wolffian globose) $1.5 \times 10^{-4} \text{ g}$ إذا احتوت ملعقة صغيرة 5×10^3 نباتات ولفية تقريباً، فأجد كتلة هذه الكمية.

مهارات التفكير العليا

18 **تبرير:** أيهما أكبر: 1000^{10} أم 10^{1000} ؟ أبرر إجابتي.

19 **اكتشف الخطأ:** حل كل من سعد وهدى مسألة قسمة مكتوبة بالصيغة العلمية على النحو الآتي، من منهُما حلّه صحيح؟ أبرر إجابتي.

هدى	سعد
$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$	$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$
$= 5.2 \times 10^{-11}$	$= 5.2 \times 10^{-13}$

20 **مسألة مفتوحة:** أكتب عددين بالصيغة العلمية ناتج ضربيهما 7.2×10^5 ، ثم عددين بالصيغة العلمية ناتج قسمتهما 7.2×10^5

21 **اكتب:** كيف أكتب الأعداد الكليّة والعشرية بالصيغة العلمية؟

أستكشف



في عام 2018 أنتج الأردن 21 ألف طن من زيت الزيتون، وفي عام 2019 أنتج 119% مما أنتجته عام 2018. ما معنى النسبة 119%؟ وكم أنتج الأردن من الزيت عام 2019؟

فكرة الدرس

أحل مسائل على النسبة المئوية.

المصطلحات

النسبة المئوية للتغير، نسبة الزيادة المئوية، نسبة النقصان المئوية، النسبة المئوية العكسية

أفكر

لإيجاد النسبة المئوية من كمية، أحول النسبة المئوية إلى كسر أو كسر عشري، ثم أضرب الكسر الناتج في الكمية.

النسبة المئوية هي نسبة تقارن عدداً بالعدد 100، فإذا كان العدد أكبر من 100، فإن النسبة المئوية تكون أكبر من 100%، أما إذا كان العدد الذي أقرن به أقل من 1، فإن النسبة المئوية تكون أقل من 1%.

مثال 1

أجد قيمة كل مما يأتي:

1 150% من 5

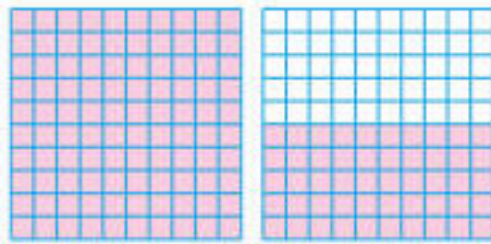
أضرب النسبة المئوية في العدد
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 150% من 5 تساوي 7.5

2 0.7% من 2000

أضرب النسبة المئوية في العدد
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 0.7% من 2000 تساوي 14

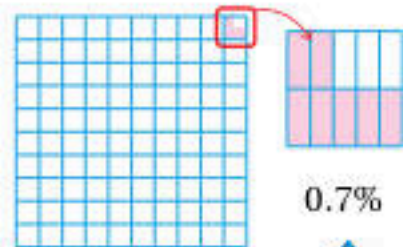


150%

$$\begin{aligned} 150\% \times 5 \\ = 1.5 \times 5 \\ = 7.5 \end{aligned}$$

أتعلم

150% تعني 100% + 50%



0.7%

$$\begin{aligned} 0.7\% \times 2000 \\ = 0.007 \times 2000 \\ = 14 \end{aligned}$$

0.7% هي نسبة كسرية بين 0% و 1%

✓ **أتحقق من فهمي:**

4 0.1% من 5000

3 350% من 10

يوجد الكثير من التطبيقات الحياتية المهمة على النسبة المئوية.

مثال 2: من الحياة

1

راتب: تتقاضى فاطمة راتباً شهرياً قدره JD 750، كم يصبح هذا الراتب إذا زاد بنسبة 12%؟

إنَّ زيادةَ الراتبِ بنسبة 12% تكافئُ نسبةَ 100% الأصلية مضافاً إليها 12%، وهذا يعني أنَّ المجموعَ الكليَّ للنسبِ 112%، ومن ثمَّ، فإنه يمكنُ إيجادَ راتبِ فاطمة بعدَ الزيادة بضربِ الراتبِ القديم في 112%

أفكر

هل يمكنُ إيجادَ راتبِ فاطمة بعدَ الزيادة بطريقةٍ أخرى؟

$$\begin{aligned} 112\% \times 750 \\ = 1.12 \times 750 \\ = 840 \end{aligned}$$

أضربُ النسبةَ المئوية في الكمية الأصلية
أحولُ النسبةَ المئوية إلى كسرٍ عشريٍّ
أضربُ

إذن، راتبُ فاطمة بعدَ الزيادة JD 840

2

سيارة: اشترى كريمُ سيارةً بمبلغ JD 6500 العام الماضي، كم يصبحُ السعرُ إذا

انخفضَ سعرُ السيارة هذا العام بنسبة 15%؟

إنَّ انخفاضَ سعرِ السيارة بنسبة 15% يكافئُ نسبةَ 100% الأصلية مطروحاً منها 15%،

وهذا يمثلُ 85% من السعرِ الأصلي؛ لذا يمكنُ إيجادَ سعرِ السيارة بعدَ الانخفاض بضربِ سعرِها القديم في 85%

أفكر

هل يمكنُ إيجادَ سعرِ السيارة بعدَ النقصانِ بطريقةٍ أخرى؟

$$\begin{aligned} 85\% \times 6500 \\ = 0.85 \times 6500 \\ = 5525 \end{aligned}$$

أضربُ النسبةَ المئوية في الكمية الأصلية
أحولُ النسبةَ المئوية إلى كسرٍ عشريٍّ
أضربُ

إذن، سعرُ السيارة هذا العام JD 5525



✓ **أتحقق من فهمي:**

- 3 ازداد طول نبتة بنسبة 25% مما كان عليه طولها قبل أسبوع. أجد طول النبتة الآن إذا كان طولها في الأسبوع السابق 40 cm
- 4 قرّرت إدارة أحد المصانع تخفيض عدد عمّالها بتسريح 30% منهم. إذا كان عدد العمال في المصنع 416 عاملاً، فكّم عاملاً سيبقى في المصنع؟

النسبة المئوية للتغير (percentage change) (pc) هي النسبة المئوية لمقدار التغير من الكمية الأصلية، ويمكن أن تكون النسبة المئوية للتغير **نسبة زيادة مئوية** (percentage increase) أو **نسبة نقصان مئوية** (percentage decrease)

النسبة المئوية للتغير

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** النسبة المئوية للتغير هي النسبة المئوية بين التغير في كمية ما والكمية الأصلية.

$$(النسبة المئوية للتغير) = \frac{(مقدار التغير)}{(الكمية الأصلية)} \times 100\%$$

مثال 3: من الحياة



- 1 **آلة حاسبة:** باع محلّ للإلكترونيات 80 آلة حاسبة في شهر أيلول، و104 آلات حاسبة في شهر تشرين الأول. أجد النسبة المئوية للتغير في عدد الآلات الحاسبة المباعة من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول.

الخطوة 1 أجد مقدار التغير.

لأجد مقدار التغير، أطرح الكمية الأصلية من الكمية الجديدة.

$$104 - 80 = 24$$

الكمية الجديدة - الكمية الأصلية

إذن، مقدار التغير يساوي 24

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير.

$$\text{صيغة النسبة المئوية للتغير} = \frac{(\text{مقدار التغير})}{(\text{الكمية الأصلية})} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{24}{80} \times 100\% \quad \text{أعوّض}$$

$$= \frac{3}{10} \times 100\% \quad \text{أبسط}$$

$$= 30\% \quad \text{أضرب}$$

إذن، زادت المبيعات من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول بنسبة 30%



أُتَعَلَّمُ

بما أن كتلة عمّر الجديدة أقل من كتلته الأصلية؛ فإن مقدار تغير كتلته يكون سالبًا.

2 إذا كانت كتلة عمّر 95 kg قبل اتباعه نظامًا غذائيًا متوازنًا، وأصبحت كتلته الآن 78 kg، فأجد النسبة المئوية للتغير في كتلة عمّر. أقرب إجابتي لأقرب عدد صحيح.

الخطوة 1 أجد مقدار التغير.

لأجد مقدار التغير، أطرح الكمية الأصلية من الكمية الجديدة.

$$78 - 95 = -17 \quad \text{الكمية الجديدة - الكمية الأصلية}$$

إذن، مقدار التغير يساوي -17

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير.

$$\text{صيغة النسبة المئوية للتغير} = \frac{(\text{مقدار التغير})}{(\text{الكمية الأصلية})} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{-17}{95} \times 100\% \quad \text{أعوّض}$$

$$\approx -18\% \quad \text{أستعمل الآلة الحاسبة}$$

إذن، خسر عمّر 18% من كتلته الأصلية.

✓ أتتحقق من فهمي:

3 اشترى معاذ زهورًا بقيمة JD 240 وباعها بسعر JD 300. أجد النسبة المئوية لربح معاذ.

4 اشترت فرح كاميرا بقيمة JD 119 بعد التخفيض، إذا كان سعر الكاميرا قبل التخفيض JD 140، فأجد النسبة المئوية للخصم الذي حصلت عليه فرح.

الوحدة 1

من التطبيقات المهمة على النسبة المئوية أسئلة **النسبة المئوية العكسية** (reverse percentage)، التي تتطلب الحل بشكل عكسي بدءاً من الكمية النهائية للحصول على الكمية الأصلية.

مثال 4: من الحياة



أفكر

لِمَ نقسم على نسبة
التغير المئوية عند
إيجاد الكمية الأصلية؟

كيمياء: في إحدى التجارب الكيميائية سُخِّنَ سائل لرفع درجة حرارته بنسبة 16% لتصبح 80°C ، أجد درجة حرارة السائل T قبل الزيادة.

بما أن درجة الحرارة T زادت بنسبة 16%، إذن، النسبة المئوية بعد الزيادة تساوي 116%

$$T = \frac{80}{116\%}$$

$$= \frac{80}{1.16}$$

$$\approx 69$$

أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد الزيادة

أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أقسم

إذن، درجة حرارة السائل قبل الزيادة 69°C تقريباً.

ثلاجات: أعلن متجرٌ للثلاجات عن خصم نسبته 20%. إذا كان سعرٌ ثلاجة بعد الخصم JD 600، فأجد سعرها P قبل الخصم.

بما أن سعر الثلاجة نقص بنسبة 20%، إذن، النسبة المئوية بعد النقصان تساوي 80%

$$P = \frac{600}{80\%}$$

$$= \frac{600}{0.80}$$

$$= 750$$

أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد النقصان

أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أقسم

إذن، سعر الثلاجة قبل الخصم JD 750

أتحقق من فهمي:



3 زاد سعر سيارة بنسبة 6% ليصبح JD 9116. أجد سعرها P قبل الزيادة.

4 في موسم التنزيلات، بلغ سعر شاشة تلفاز JD 500. إذا كانت نسبة الخصم 7%، فأجد ثمن الشاشة P قبل الخصم.

أجد قيمة كل مما يأتي:

- 1 300% من 2000 2 0.14% من 40 3 250% من 400



4 **ماء:** يزيد حجم الماء عند تجمده بنسبة 10%. أجد حجم 750 mL من الماء بعد التجمد.

5 **سيارات:** زادت شركة للسيارات سعر سيارة رياضية من JD 23000 إلى JD 25000. أجد النسبة المئوية للزيادة في سعر السيارة، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.



6 **بطارية:** تفقد بطارية هاتف شحنها الكامل بعد 20 ساعة. إذا كانت النسخة المطورة من البطارية تستمر 30 دقيقة إضافية، فأجد النسبة المئوية للزيادة في زمن عمل البطارية.

	الاختبار A	الاختبار B
عمران	12	17
نادية	14	20

7 **اختبارات:** خضع عمران ونادية لاختبارين لهما النهاية العظمى نفسها، وكانت نتائجهما مثلما يظهر في الجدول. من منهما كانت النسبة المئوية للزيادة في علامته أكبر من الاختبار A إلى الاختبار B؟ أبين خطوات الحل.

8 خففت شركة عدد عمالها بنسبة 5% فأصبح 228 عاملاً. أجد عدد عمال الشركة الأصلي.



9 **راتب:** يتقاضى طبّاح JD 1431 شهرياً بعد زيادة على راتبه بنسبة 8%. أجد راتب الطّباح قبل الزيادة.

10 اشترى أحمد كرسيّاً دوّاراً وباعه بمبلغ JD 63. إذا كانت نسبة خسارته فيه 55%، فما الثمن الأصلي للكرسي؟

معدل التنفس: إذا كان معدل تنفس لؤي 20 مرة في الدقيقة، فأجيب عما يأتي:



11 أجد عدد مرات تنفس لؤي إذا أصبحت 180% مما كانت عليه؛ نتيجة ممارسته إحدى الرياضات.

12 نتيجة لممارسة لؤي رياضة أشد أصبح معدل تنفسيه 120% من عدد مرات الرياضة الأول، أجد عدد مرات تنفسيه الجديد.

13 أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

معلومة

يُقاس معدل التنفس عند الإنسان بعدد الأنفاس التي يأخذها في الدقيقة الواحدة، ويعتمد ذلك على عدة عوامل، منها: عمر الشخص، وحالته الصحية، والجهد الذي يبذله.

مهارات التفكير العليا

14 **تحذ:** إذا كانت 38% من القوارير البلاستيكية التي يُنتجها مصنع زرقاء اللون، والقوارير المتبقية وعددها 7750 قارورة لونها بني؛ فأجد عدد القوارير الزرقاء التي يُنتجها المصنع.

15 **تبرير:** صممت جمانة مزهرتين فخاريتين وباعتهما بالسعر الموضح في الشكل الآتي. تقول جمانة إن نسبة ربحها في المزهرية الأولى أكبر من نسبة ربحها في المزهرية الثانية. هل ما تقوله جمانة صحيح؟ أبرر إجابتي.

المزهرية الأولى



سعر التكلفة JD 13
سعر البيع JD 16.7

المزهرية الثانية



سعر التكلفة JD 18
سعر البيع JD 22.5

16 **اكتب:** كيف أجد النسبة المئوية للتغير؟ وبم أفسر معنى النسبة التي تزيد على 100%؟

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 قيمة $\sqrt{2500}$ تساوي:

- a) 25 b) -50
c) 50 d) ± 50

2 قيمة $(\sqrt{1.44} - 4.2)$ تساوي:

- a) 3 b) -3
c) 7.8 d) -5.4

3 أفضل تقدير للعدد $(8 - \sqrt{40})$ هو:

- a) 4 b) -16 c) 1 d) 2

4 قيمة $(\sqrt{2} \times \sqrt{32})$ تساوي:

- a) 6 b) 8 c) 64 d) 16

5 مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول وتره $\sqrt{72}$ cm. فإن طول كل من ضلعي القائمة يساوي:

- a) 36 cm b) $3\sqrt{2}$ cm
c) 6 cm d) 18 cm

6 أي مجموعات الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

- a) 6, 8, 11 b) $\sqrt{10}$, 4, 5
c) $6, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ d) 5, 12, 14

7 أحد الأعداد الآتية عدد غير نسبي:

- a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{6.25}$
c) $3\frac{1}{5}$ d) -2

8 قيمة $\sqrt[10]{64 \times 2^4}$ تساوي:

- a) 8 b) 2 c) 4 d) 6

9 أبسط صورة للمقدار $\frac{u^{\frac{7}{4}} \times u^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{2}}}$ هي:

- a) u^2 b) u^3 c) $u^{\frac{1}{2}}$ d) u

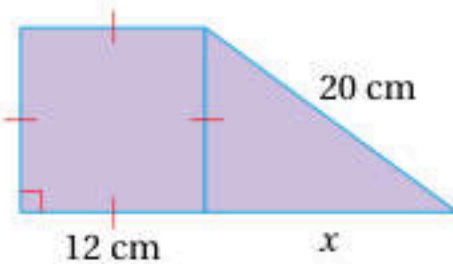
10 تبلغ سرعة الصوت 1236 km/h، وتكتب بالصيغة العلمية:

- a) 1.236×10^4 b) 1.236×10^{-3}
c) 1.236×10^3 d) 12.36×10^2

11 ناتج القسمة $((3 \times 10^{-2}) \div (5 \times 10^{-6}))$ هو:

- a) 0.6×10^3 b) 6×10^4
c) 6×10^{-3} d) 6×10^3

12 أجد طول الضلع المجهول في الشكل الآتي:



تدريب على الاختبارات الدولية

21 أبسط صورة للمقدار $\frac{6}{\sqrt{12}}$ هي:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{12}}{2}$
c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

22 ناتج $(5.2 \times 10^6)(3.4 \times 10^7)$ بالصيغة العلمية هو:

- a) 1.768×10^{14} b) 17.68×10^{13}
c) 8.6×10^{13} d) 1.768×10^{42}

23 أي المقادير الآتية يكافئ المقدار $(8y)^{\frac{4}{3}}$ ؟

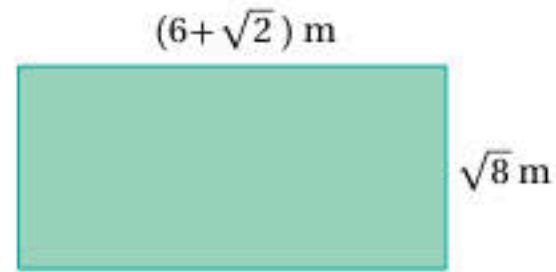
- a) $\sqrt[4]{16y^3}$ b) $\sqrt[3]{8y^4}$
c) $16\sqrt[3]{y^4}$ d) $8\sqrt[4]{y^3}$

24 تُشير سجلات قسم الولادة في أحد المستشفيات إلى وجود 50 مولودًا 56% منهم إناث. إذا زاد عدد المواليد الإناث 7، فأجد النسبة المئوية لهذه الزيادة.

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

- 13 $-\sqrt{36}$ 14 $\sqrt{50}$

15 أجد مساحة المستطيل الآتي بأبسط صورة:



16 أرتب مجموعة الأعداد الآتية تصاعديًا:

$$\sqrt{24}, 5\frac{1}{4}, 4.\bar{6}, 5, \pi$$

17 أبسط المقدار $\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{28}}$

18 أكتب المقدار $\frac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{-\frac{4}{3}}}$ بأبسط صورة.

19 يبلغ طول حشرة الماء 0.01981 cm، وطول حشرة السوس 0.09652 cm. أكتب العددين بالصيغة العلمية، ثم أحدد أي الحشرتين أطول.



20 باع متجر بذلة رجالية بمبلغ JD 150، وبيع مقداره 30% أجد سعر التكلفة. أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

تحليل المقادير الجبرية

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية، فمثلاً يكتب المهندسون المعماريون النسبة بين مساحة جدران الغرفة وحجمها على صورة مقدار جبري نسبي، ثم يستعملون التحليل لتبسيطه وإيجاد أقل قيمة له؛ بهدف تقليل تكلفة تدفئة الغرفة في فصل الشتاء.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- حالات خاصة لضرب المقادير الجبرية.
- تحليل مقادير جبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر وتجميع الحدود.
- تحليل الفرق بين مربعي حدين، وتحليل ثلاثي حدود على صورة $x^2 + bx + c$
- كتابة مقادير جبرية نسبية بأبسط صورة.

تعلمت سابقاً:

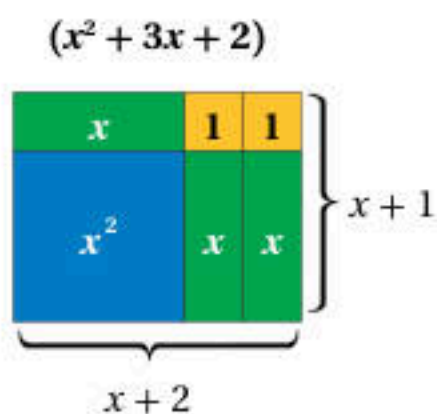
- ✓ إجراء العمليات الحسابية على الحدود والمقادير الجبرية، وكتابتها بأبسط صورة.
- ✓ تبسيط مقادير عديدة تتضمن أسساً باستخدام أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ توظيف الأسس والمقادير الجبرية في حل مسائل حياتية.



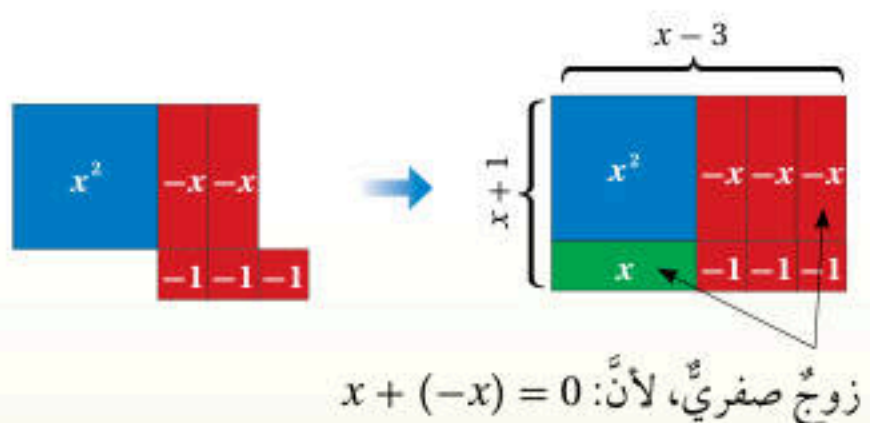
مشروع الوحدة: القطع الجبرية

أستعمل القطع الجبرية لتمثيل مقادير جبرية وتحليلها:

يستخدم كل عضو في المجموعة القطع الجبرية لتمثيل مقدار جبري، ثم ينظم القطع الجبرية على شكل مستطيل، وعندئذ يكون طول المستطيل وعرضه عاملَي المقدار الجبري كما في الشكل الآتي:



يحتاج تمثيل بعض المقادير الجبرية إلى إضافة أزواج صفرية مثل $(1 + -1 = 0)$ لإكمال تشكيل المستطيل:



عرض النتائج:

• يعرض كل فرد في المجموعة أمام زملائه في الصف كيفية تحليل مقدار جبري يختاره باستعمال القطع الجبرية.

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعي الخاص الذي سأصنع فيه قطعاً جبرية، وأستعملها في تحليل المقادير الجبرية.

الأدوات اللازمة:

أوراق مقواة متعددة الألوان (أزرق، وأخضر، وأحمر، وأصفر).

خطوات تنفيذ المشروع:

أصنع القطع الجبرية

1 أقص 5 مربعات من الورقة الزرقاء بمقاس $(10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})$ ، وأكتب x^2 على كل منها.

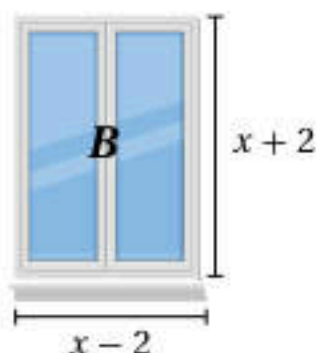
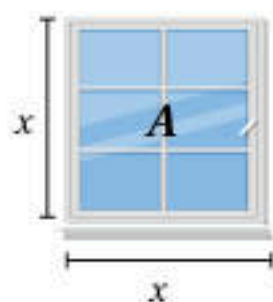


2 أقص 10 مستطيلات من الورقة الخضراء بمقاس $(3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})$ ، وأكتب (x) على كل منها، وأقص 10 مستطيلات بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب $(-x)$ على كل منها.



3 أقص 15 مربعاً من الورقة الصفراء بمقاس $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ ، وأكتب (1) على كل منها، وأقص 15 مربعاً بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب (-1) على كل منها.





أستكشف

أي النافذتين مساحتها أكبر؟

فكرة الدرس

أتعرف قواعد إيجاد مربع مجموع حدّين ومجموع حدّين في الفرق بينهما.

تعلّمت سابقاً إيجاد مربع مجموع حدّين على الصورة $(a+b)^2$ عن طريق إيجاد حاصل الضرب $(a+b)(a+b)$ ، ويمكن أيضاً استعمال القطع الجبرية لتمثيل $(a+b)^2$ لأي قيمتين a و b كما يأتي:

$$\begin{array}{c} a+b \\ \left\{ \begin{array}{cc} a & b \\ a & a^2 \\ b & ab \end{array} \right\} \begin{array}{cc} a & b \\ ab & b^2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ + \\ ab \\ + \\ ab \\ + \\ b^2 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

إذن، ضرب مجموع حدّين في نفسه (مربع مجموع حدّين) يتبع قاعدة ثابتة يمكن استعمالها لتسهيل عملية الضرب.

مربع مجموع حدّين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** مربع $(a+b)$ يساوي مربع a مضافاً إليه مثلاً حاصل ضرب a في b مضافاً إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال 1

أجد ناتج كل ممّا يأتي:

1 $(3k+5)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3k+5)^2 = (3k)^2 + (2 \times 3k \times 5) + (5)^2$$

$$= 9k^2 + 30k + 25$$

مربع مجموع حدّين

$$a = 3k, b = 5$$

أبسط

الوحدة 2

2 $(y^2 + 3)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(y^2 + 3)^2 = (y^2)^2 + (2 \times y^2 \times 3) + 3^2$$

$$= y^4 + 6y^2 + 9$$

مربع مجموع حدين

$$a = y^2, b = 3$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $(2c + 10)^2$

4 $(d^2 + 4)^2$

توجد أيضًا قاعدة لإيجاد $(a-b)^2$ ، ويمكن إيجادها بكتابة $(a-b)$ على صورة $a + (-b)$ ثم استعمال قاعدة $(a+b)^2$:

$$(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = (a)^2 + 2(a)(-b) + (b)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

مربع مجموع حدين

أبسط

مربع الفرق بين حدين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** مربع $(a-b)$ يساوي مربع a مطروحًا منه مثلًا حاصل ضرب a في b مضافًا إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 2

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(2h - z)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2h-z)^2 = (2h)^2 - (2 \times 2h \times z) + (z)^2$$

$$= 4h^2 - 4hz + z^2$$

مربع الفرق بين حدين

$$a = 2h, b = z$$

أبسط

2 $(6-5y^3)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(6-5y^3)^2 = (6)^2 - (2 \times 6 \times 5y^3) + (5y^3)^2$$

$$= 36 - 60y^3 + 25y^6$$

مربع الفرق بين حدين

$$a = 6, b = 5y^3$$

أبسط

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $(7t^2 - 1)^2$

4 $(x^3 - 4y^2)^2$

يتبع ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما $(a-b)(a+b)$ قاعدة ثابتة يمكن اكتشافها واستعمالها في إيجاد ناتج الضرب بسهولة:

$$\begin{array}{c} a + (-b) \\ \hline a \quad -b \\ \hline \begin{array}{cc} a & -b \\ a & -ab \\ b & ab \\ b & -b^2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ -ab \\ ab \\ -b^2 \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ -ab \\ ab \\ -b^2 \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ -b^2 \end{array}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + (-ab) + ab + (-b^2) = a^2 + (-b^2)$$

ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ناتج ضرب $(a-b)(a+b)$ يساوي مربع a مطروحاً منه مربع b .

• **بالرموز:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال 3 أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(c+3)(c-3)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(c+3)(c-3) = (c)^2 - 3^2$$

$$= c^2 - 9$$

ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

$$a = c, b = 3$$

أبسط

2 $(4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5) = (4x^2)^2 - (d^5)^2$$

$$= 16x^4 - d^{10}$$

مربع مجموع حدين

$$a = 4x^2, b = d^5$$

أبسط

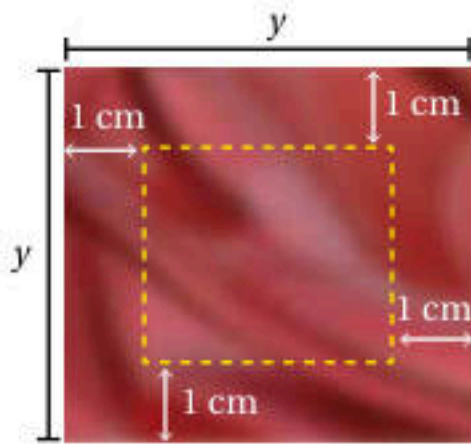
أتحقق من فهمي:

3 $(6w + d^4)(6w - d^4)$

4 $(x^3 + 3h^7)(x^3 - 3h^7)$

تُستعمل قوانين (مربع مجموع حدّين) و (مربع الفرق بين حدّين) و (مجموع حدّين في الفرق بينهما) في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 4: من الحياة



خياطة: قطعة قماش مربعة الشكل طول ضلعها y سنتيمتراً، إذا قُصّ شريط عرضة 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع، فأجد المساحة المتبقية وسط قطعة القماش بدلالة y .

الخطوة 1 أحدد طول ضلع قطعة القماش المتبقية في الوسط بعد القصّ. طول قطعة القماش الأصلية y سنتيمتراً قُصّ منها 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع. إذن، أصبح طول الضلع $(y-2)$ سنتيمتراً.

الخطوة 2 أحسب المساحة.

$$A = s^2$$

$$= (y-2)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(y-2)^2 = y^2 - (2 \times y \times 2) + 2^2$$

$$= y^2 - 4y + 4$$

مساحة المربع

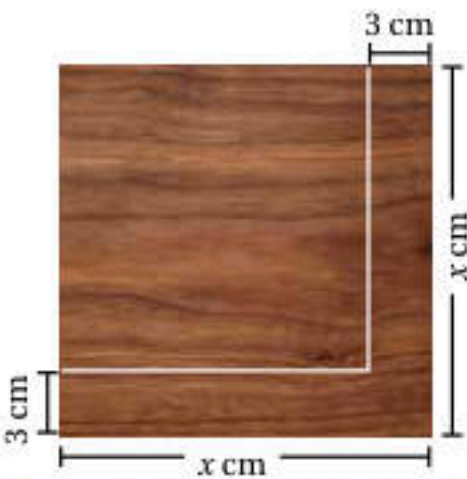
$$s = y - 2$$

قانون مربع الفرق بين حدّين

$$a = y, b = 2$$

أبسط

إذن، المساحة المتبقية في الوسط من القماش بدلالة y هي $(y^2 - 4y + 4) \text{ cm}^2$



أتحقق من فهمي:

نجارة: يبيّن الشكل المجاور أبعاد لوح خشبي مربع الشكل طول ضلعه x سنتيمتراً. إذا قُصّ شريط عرضة 3 cm من حافتي اللوح مثلما يظهر في الشكل، فأحسب مساحة المربع المتبقي من اللوح بدلالة x .

يمكن استعمال قواعد ضرب المقادير الجبرية لإجراء بعض الحسابات الذهنية بسهولة.

مثال 5

استعمل الحساب الذهني لأجد ناتج كل مما يأتي:

1 71^2

$$71^2 = (70 + 1)^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(70 + 1)^2 = 70^2 + (2 \times 70 \times 1) + 1^2$$

$$= 4900 + 140 + 1$$

$$= 5041$$

أكتب 71^2 على صورة مربع مجموع حدين

مربع مجموع حدين

أعوض $a = 70, b = 1$

أضرب

أجمع

إذن، $71^2 = 5041$

أتحقق من فهمي:



2 52^2

3 49^2

أتدرب
وأحل المسائل



أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(w + 2)^2$

2 $(x - 11)^2$

3 $(4m^3 - 5y)^2$

4 $(w^2 - 7)(w^2 - 7)$

5 $(5a + 4)(5a - 4)$

6 $(x^2 + 7y^4)(x^2 - 7y^4)$



7 **هندسة:** بركة سباحة مستطيلة الشكل، طولها بالمتري $(3x + 6)$ وعرضها بالمتري $(3x - 6)$ ، أجد مساحتها بدلالة x وبأبسط صورة.

الوحدة 2

حساب ذهني: أستخدم الحساب الذهني لأجد ناتج كل مما يأتي:

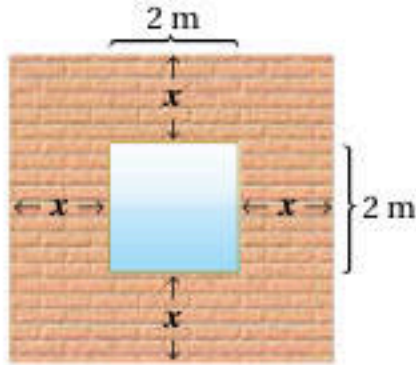
8 88^2

9 403^2

10 37^2

معلومة

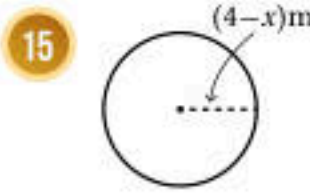
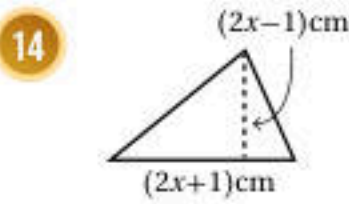
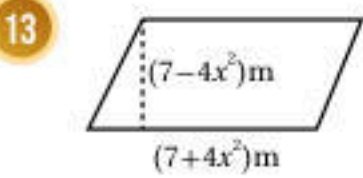
تتمدد معظم المواد بالحرارة وتقلص بالبرودة، إلا أن الماء يخالف هذه القاعدة، إذ أنه يتمدد بالبرودة ويتقلص بالحرارة.



11 يبين الشكل المجاور جداراً مربع الشكل تتوسطه نافذة. أعبّر عن مساحة الجدار بدلالة x بطريقتين مختلفتين.

12 **علوم:** لوحة معدنية مربعة الشكل، طول ضلعها بالسنتيمتر (w)، إذا تعرضت للحرارة فتمددت مُحافِظَةً على شكلها وازداد طول ضلعها بمقدار 0.02 cm ، فأجد مساحة اللوحة بعد التمدد بدلالة w .

قياس: أجد مساحة كل شكل مما يأتي بدلالة x :



مهارات التفكير العليا

16 **اكتشف المختلف:** أجدد العبارة المختلفة عن بقية العبارات:

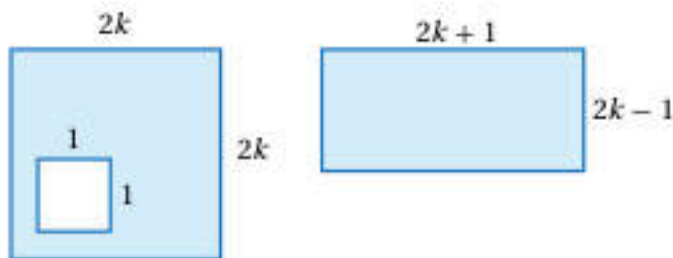
$x^2 - 10x + 25$

$x^2 + 6x + 18$

$x^2 + 8x + 16$

$x^2 + 2x + 1$

17 **تحذ:** هل توجد قاعدة لحساب $(x - y)^3$ ؟



18 **تبرير:** أبين أن مساحتي الجزأين المظللين في الشكلين المجاورين متساويتان أم لا. أبرر إجابتي.

إرشاد

لحل هذا السؤال، أكتب المقدار بصورة ضرب مكرر.

19 **اكتب:** أكتب فقرة أبين فيها كيف أجد مربع مجموع حدين.



الهدف: أحلّ مقدارًا جبريًا معطى على صورة $ax + b$ أو الصورة $x^2 + bx$ باستعمال القطع الجبرية.

عند ضرب عددين أو أكثر فإن كلاً منهما يُسمى عاملاً لنتائج الضرب.

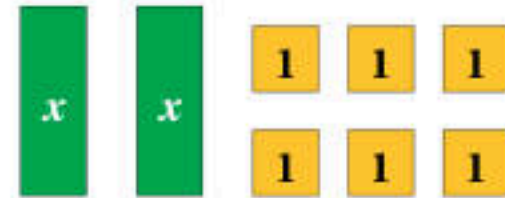
في بعض الأحيان، يكون ناتج الضرب معلومًا والمطلوب إيجاد العوامل، وتُسمى هذه العملية التحليل. يمكن استعمال القطع الجبرية لتحليل المقادير الجبرية.

نشاط 1

أستعمل القطع الجبرية لتحليل المقدار $2x + 6$

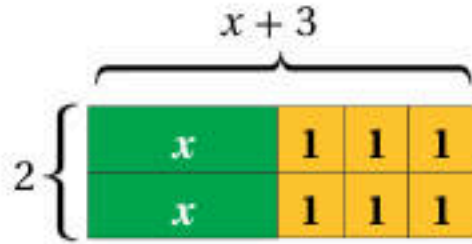
الخطوة 1

أمثل المقدار $2x + 6$ باستعمال قطع جبرية:



الخطوة 2

أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل. ألاحظ أن طول المستطيل $(x+3)$ وعرضه (2) ومساحته $(2x+6)$.



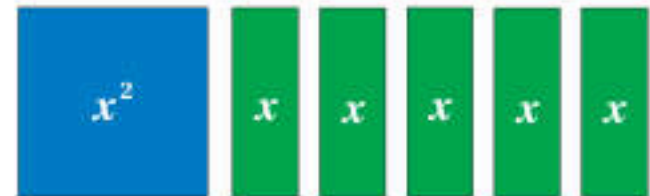
$$2x + 6 = (2)(x + 3) \text{، إذن،}$$

نشاط 2

أستعمل القطع الجبرية لتحليل المقدار $x^2 + 5x$

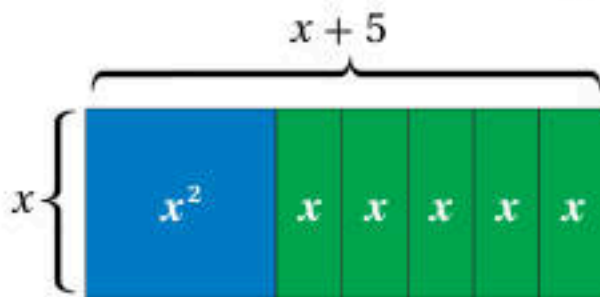
الخطوة 1

أستعمل القطع الجبرية لتمثيل المقدار $x^2 + 5x$



الخطوة 2

أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل. ألاحظ أن طول المستطيل $(x+5)$ وعرضه (x) ومساحته $(x^2 + 5x)$



$$x^2 + 5x = x(x + 5) \text{، إذن،}$$

أُتدرب:



أستخدم القطع الجبرية لتحليل كل مقدار جبري مما يأتي:

1 $5x + 5$

2 $2x + 8$

3 $x^2 + 7x$

4 $x^2 + 4x$



فكرة الدرس

أحلل مقادير جبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر.

المصطلحات

الصورة التحليلية، التحليل، التجميع.

أستكشف



شاشة تلفاز مستطيلة الشكل،
مساحتها $2x^2 + 60x$ سنتيمترا مربعا،
وعرضها $2x$ سنتيمترا، ما طولها
بدلالة x ؟

كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية (factored form) تعني كتابته على صورة حاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات كل منها مرفوع للأس 1، وعند كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية فإننا نقول إنه حُلِّل تحليلًا كاملاً.

$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$

مكتوب بالصورة التحليلية
(تحليل كامل)

$$18x^3 = 6 \times 3 \times x \times x^2$$

ليس مكتوباً بالصورة التحليلية
(ليس تحليلًا كاملاً)

تعلمت سابقاً أن العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لعددتين أو أكثر يساوي ناتج ضرب العوامل الأولية المشتركة بينها، ويمكن أيضاً إيجاد العامل المشترك الأكبر لحددين جبريين أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال 1

أجد العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين في كل مما يأتي:

1 $12y^2, 18y$

$$12y^2 = 3 \times 2 \times 2 \times y \times y$$

$$18y = 3 \times 3 \times 2 \times y$$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية

ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $12y^2$ و $18y$ هو: $3 \times 2 \times y = 6y$

2 $20z^2 d, 10z^5 dc$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية
 ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

$$20z^2 d = 5 \times 2 \times 2 \times z \times z \times d$$

$$10z^5 dc = 5 \times 2 \times z \times z \times z \times z \times z \times d \times c$$

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $20z^2 d$ و $10z^5 dc$ هو $5 \times 2 \times z \times z \times d = 10z^2 d$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $14b^2 c, 21c^3$

4 $2y^3 x^5, 3y^5 x^3$

أذكر

يحتوي المقدار الجبري
 حدًا جبريًا أو أكثر.

تعلمت سابقًا استعمال خاصية التوزيع لضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x(x + 8) = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x^2 + 24x$$

يمكن عكس خطوات هذه العملية لإعادة كتابة مقادير جبرية على صورة حاصل ضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x^2 + 24x = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x(x + 8)$$

تحليل (factoring) المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر لحدوده يعني تحليله تحليلًا كاملاً باستعمال عملية عكسية لعملية التوزيع (خاصية التوزيع).

$$4y(3y + 4)$$

تحليل كامل

$$2y(6y + 8)$$

ليس تحليلًا كاملاً؛ لأن $(6y + 8)$ يمكن
 تحليلها على صورة $2(3y + 4)$

أحلل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $6x + 18$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحددين $6x$ و 18

$$\begin{aligned} 6x &= 2 \times 3 \times x \\ 18 &= 2 \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية وأحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 3 = 6$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس.

$$\begin{aligned} 6x + 18 &= 6(x) + 6(3) \\ &= 6(x + 3) \end{aligned}$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6x + 18 = 6(x + 3)$

2 $6b^2k + 8k^3b^5 + 12k^2$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحدود التي يتكوّن منها المقدار الجبري.

$$\begin{aligned} 6b^2k &= 2 \times 3 \times b \times b \times k \\ 8k^3b^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times k \times k \times k \times b \times b \times b \times b \times b \\ 12k^2 &= 2 \times 2 \times 3 \times k \times k \end{aligned}$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times k = 2k$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس.

$$\begin{aligned} 6b^2k + 8k^3b^5 + 12k^2 &= 2k(3b^2) + 2k(4k^2b^5) + 2k(6k) \\ &= 2k(3b^2 + 4k^2b^5 + 6k) \end{aligned}$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6b^2k + 8k^3b^5 + 12k^2 = 2k(3b^2 + 4k^2b^5 + 6k)$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $20y + 12$

4 $7d^2 - 5d$

5 $3r^2 c^3 + 6r^5 + 21r^7$

6 $2 - 16x + 8y$

يمكن أيضًا تحليل بعض المقادير الجبرية التي تحتوي أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة **التجميع** (grouping)، وذلك بتجميع الحدود التي توجد عوامل مشتركة بينها، ويمكن أن تكون هذه العوامل المشتركة مقادير جبرية (ليست حدودًا فحسب).

التحليل بتجميع الحدود

مفهوم أساسي

- **بالكلمات:** يمكن تحليل المقدار الجبري بالتجميع إذا تحققت فيه الشروط الآتية جميعها:
 - إذا احتوى أربعة حدود أو أكثر.
 - إذا احتوى عوامل مشتركة بين الحدود يمكن تجميعها معًا.
 - إذا احتوى عاملين مشتركين متساويين كان أحدهما نظيرًا جمعيًا (معكوسًا) للآخر.

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

• **بالرموز:**

مثال 3

أحل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $5ab + 10a + 7b + 14$

$$5ab + 10a + 7b + 14 = (5ab + 10a) + (7b + 14)$$

$$= 5a(b + 2) + 7(b + 2)$$

$$= (b + 2)(5a + 7)$$

أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة

أحل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

أخرج $(b + 2)$ عاملاً مشتركاً

الوحدة 2

2 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

$$\begin{aligned} 6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2 &= (6m^3 - 12mn) + (m^2n - 2n^2) \\ &= 6m(m^2 - 2n) + n(m^2 - 2n) \\ &= (m^2 - 2n)(6m + n) \end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة
أحلل كل تجميع بإخراج العامل
المشترك الأكبر
أخرج $(m^2 - 2n)$ عاملاً مشتركاً

أتدقق من فهمي:



3 $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

4 $4s^2 - s + 12st - 3t$

عند تحليل المقادير الجبرية، ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً $(3-x)$ هو معكوس $(x-3)$ لأن
 $(3-x) = -1(x-3)$

مثال 4

أحلل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $2m(7m - 3) + 4(3 - 7m)$

$$\begin{aligned} 2m(7m - 3) + 4(3 - 7m) &= 2m(7m - 3) + 4(-1)(7m - 3) && \text{أكتب } (3 - 7m) \text{ بصورة } -1(7m - 3) \\ &= 2m(7m - 3) - 4(7m - 3) && \text{أضرب: } 4(-1) = -4 \\ &= (7m - 3)(2m - 4) && \text{أخرج } 7m - 3 \text{ عاملاً مشتركاً} \\ &= 2(7m - 3)(m - 2) && \text{أخرج 2 عاملاً مشتركاً} \end{aligned}$$

2 $15x - 5xy + 6y^2 - 18y$

$$\begin{aligned} 15x - 5xy + 6y^2 - 18y &= (15x - 5xy) + (6y^2 - 18y) && \text{أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة} \\ &= 5x(3 - y) + 6y(y - 3) && \text{أحلل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر} \\ &= 5x(3 - y) + 6y(-1)(3 - y) && \text{أكتب } (y - 3) \text{ بصورة } -1(3 - y) \\ &= (3 - y)(5x - 6y) && \text{أخرج } 3 - y \end{aligned}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $a(r-t) + m(t-r)$

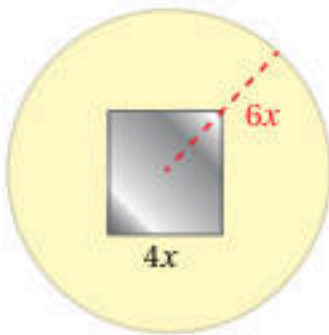
4 $2t - 14st + 7st^2 - t^2$

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 5: من الحياة



نجارة: يبين الشكل المجاور لوحًا خشبيًا دائري الشكل طول نصف قطره $6x$ سنتيمترًا، تنوسطه مرآة مربعة طول ضلعها $4x$ سنتيمترًا. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي بدلالة x ، وأحلل المقدار تحليلًا كاملاً.



الخطوة 1 أجد مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي بدلالة x :

$A_1 = r^2 \pi$	قانون مساحة الدائرة
$= (6x)^2 \pi = 36\pi x^2$	بتعويض $r = 6x$
$A_2 = s^2$	قانون مساحة المربع
$= (4x)^2 = 16x^2$	بتعويض $s = 4x$
$A = A_1 - A_2$	مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي
$= 36\pi x^2 - 16x^2$	بالتعويض

إذن، مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي تساوي $36\pi x^2 - 16x^2$ سنتيمترًا مربعًا.

الخطوة 2 أحلل المقدار $36\pi x^2 - 16x^2$ تحليلًا كاملاً:

$$36\pi x^2 = \underbrace{2 \times 3 \times 2 \times 3}_{\text{أحدد العوامل الأولية المشتركة}} \times \pi \times \underbrace{x \times x}_{\text{أحدد العوامل الأولية المشتركة}}$$

$$16x^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{أحدد العوامل الأولية المشتركة}} \times \underbrace{x \times x}_{\text{أحدد العوامل الأولية المشتركة}}$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية وأحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

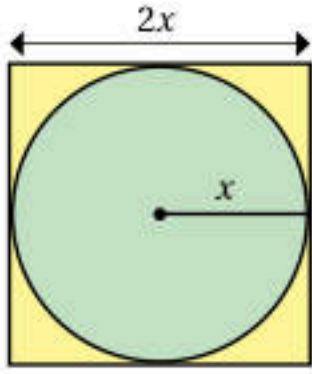
$$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2 (9\pi) - 4x^2 (4)$$

$$= 4x^2 (9\pi - 4)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر
أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2 (9\pi - 4)$

الوحدة 2



أتحقق من فهمي:

يبيّن الشكل المجاور قطعة أرض مربعة الشكل، يتوسطها حوض قمع دائري الشكل يُروى بمرشّ دوار. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة المنطقة غير المزروعة بالقمح بدلالة x ، وأحلّل المقدار تحليلًا كاملاً.

أدرب وأحل المسائل

أجد العامل المشترك الأكبر للحدّين الجبريّين في كلّ ممّا يأتي:

1 $12a, 16ab$

2 $8a, 12b$

3 $10x^6 y^3, 45x y^7$

4 $12d^2 w^2 r^5, 4w^3 d^{10}$

5 $n^3 s^5 r^5, 6ns^3 r^7$

6 $5k^8 w^3 h^2, 11k^2 h^4$

أحلّل كلّ مقدارٍ جبريّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

7 $6r^2 - 10r$

8 $ab^2 - 2ab$

9 $12n^2 m - 8nm^3$

10 $15wx - 10wy^2$

11 $4t^2 + 2t - 12tu$

12 $12p + 24q - 6$

أحلّل كلّ مقدارٍ جبريّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

13 $y - 2y^2 - 18y + 9$

14 $48ab - 90a + 32b - 60$



طاقة بديلة: ركب أحمد خلايا شمسية على سطح منزله، فإذا علمت أن مساحة اللوح الشمسي $6y(y-4) + 10(4-y)$ وحدة مربعة، وطوله $(4-y)$ ، فأجد عرضه بدلالة y .

أكمل التحليل في كلّ ممّا يأتي:

16 $12y - 32 = \dots (3y - 8)$

17 $18c - 6 = \dots (\dots - 1)$

18 $t^2 + t = \dots (\dots + 1)$

19 $2a^2 + ab = \dots (2a + \dots)$

معلومة

تُطلَى واجهَةُ القرصِ المدمجِ التي تُخزِنُ البياناتِ بطبقةٍ رقيقةٍ مِنْ الألمنيومِ النقيِّ، وتُستعملُ أشعةُ الليزرِ في تسجيلِ البياناتِ عليها.



حواسيب: حافظَةُ أقراصٍ مدمجةٍ مربعة الشكل، طولُ ضلعِها $4x$ ، فإذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ القرصِ المدمجِ $2x$ ، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ المساحةَ السوداءَ المحيطةَ بالقرصِ في الشكلِ المجاور، وأحلِّلهُ تحليلًا كاملاً.

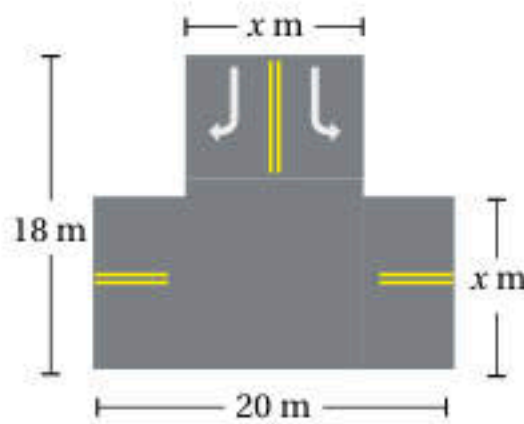
20

هندسة: يمثلُ المقدارُ الجبريُّ $2\pi r^2 + 2\pi rh$ المساحةَ الكليةَ لسطحِ أسطوانةٍ حيثُ r طولُ نصفِ قطرِ القاعدةِ و h الارتفاعُ. أحلِّ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملاً.

21

أجهزة: أعودُ إلى فقرةٍ (أستكشف)، وأحلُّ المسألة.

22



مرور: يظهرُ في الشكلِ المجاور تقاطعُ مروريٍّ أُعيدَ تعبيدُه. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقةِ التي أُعيدَ تعبيدُها، وأحلِّلهُ تحليلًا كاملاً.

23

مهارات التفكير العليا

أكتشف الخطأ: يقولُ كلُّ مِنْ خالدٍ وسلمانٍ ومثنى إنَّهُ حلَّ المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملاً على النحو الآتي، أكتشفُ الخطأَ في حلِّ كلِّ مِنْهُم، وأصحِّحُه.

24

مثنى	سلمان	خالد
$18h^2 + 45h = 3h(6h + 15)$	$2a^2 - 3a = a(2^2 - 3)$	$4g + 6 = 4(g + 2)$

مسألة مفتوحة: أملأ الفراغاتِ في كلِّ ممَّا يأتي بحدودٍ جبريةٍ لأحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:

25 + = (..... +) 26 - = (..... -)

أكتب: أكتبُ فقرةً أبينُ فيها كيفيةَ تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ بطريقةٍ التجميع.

27



أستكشف

لدى عمران بيت زجاجي للزراعة يغطي منطقة مستطيلة الشكل، مساحتها $x^2 + 5x + 6$ متراً مربعاً وعرضها $(x + 2)$ متراً. ما طول المنطقة التي يغطيها البيت الزجاجي؟

فكرة الدرس

أحلل ثلاثيات حدود على صورة $x^2 + bx + c$

عند ضرب مقدارين جبريين، فإن كلا منهما يكون عاملاً لنتائج الضرب.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (3 + 2)x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (5)x + 6\end{aligned}$$

خاصية التوزيع
بتجميع الحدين المتشابهين
بالتبسيط

ألاحظ النمط الآتي في عملية الضرب السابقة:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + (3 + 2)x + (2 \times 3) \\ (x + m)(x + n) &= x^2 + (n + m)x + mn \\ &= x^2 + \underbrace{(m + n)}_{bx} x + \underbrace{mn}_c \\ &= x^2 + bx + c\end{aligned}$$

$$b = m + n \text{ and } c = mn$$

إذن، معامل الحد الأوسط يساوي مجموع m و n ، والحد الأخير يساوي ناتج ضرب m و n .

ويمكن استعمال هذا النمط لتحليل بعض المقادير الجبرية التي على صورة $x^2 + bx + c$

تحليل ثلاثية الحدود $x^2 + bx + c$

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** لتحليل ثلاثية حدود على صورة $x^2 + bx + c$ أجد عددين صحيحين m و n مجموعهما يساوي b ، وحاصل ضربيهما يساوي c ، ثم أكتب $x^2 + bx + c$ على صورة $(x + m)(x + n)$.

• **بالرموز:** $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ حيث $m + n = b$ ، $m \times n = c$

إذا كانت إشارة c موجبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فيكون m و n الإشارة نفسها. ويعتمد تحديد إشارة كل من m و n (موجبة أو سالبة) على إشارة b ، فإذا كانت إشارة b موجبة فإن إشارتهما موجبة، وإذا كانت إشارة b سالبة، فإن إشارتهما سالبة.

مثال 1

أحلل $x^2 + 7x + 12$

بما أن $c = 12$ ، $b = 7$ فيجب إيجاد عددين موجبين مجموعهما 7 وحاصل ضربهما 12 أنشئ جدولاً، وأنظم فيه أزواج عوامل العدد 12 الموجبة، وأحدد العاملين اللذين مجموعهما 7

أزواج عوامل العدد 12 الموجبة	1, 12	2, 6	3, 4
مجموع العاملين	13	8	7

العاملان الصحيحان

$$x^2 + 7x + 12 = (x + m)(x + n)$$

$$= (x + 3)(x + 4)$$

اكتب القاعدة

أعوض $m = 3$, $n = 4$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12$$

$$= x^2 + 7x + 12 \quad \checkmark$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أتحقق من فهمي: 

1 $x^2 + 11x + 10$

2 $x^2 + 9x + 14$

إذا كانت c موجبة، و b سالبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n إشارة سالبة.

مثال 2 أحلّ $x^2 - 10x + 16$

في ثلاثي الحدود المُعطى $b = -10, c = 16$ ، وهذا يعني أنّ $m + n$ سالبة و nm موجبة. إذن، يجب أن تكون إشارة كل من m و n سالبة. أنشئ جدولاً، وأنظّم فيه أزواج عوامل العدد 16 السالبة، وأحدّد زوج العوامل الذي مجموعهُ -10

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد 16 السالبة	-1, -16	-2, -8	-4, -4
مجموع العاملين	-17	-10	-8

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= (x + m)(x + n) \\ &= (x - 2)(x - 8) \end{aligned}$$

أكتب القاعدة

$$m = -2, n = -8$$

أتحقّق: أتحقّق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$\begin{aligned} (x - 2)(x - 8) &= x^2 - 2x - 8x + 16 \\ &= x^2 - 10x + 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

خاصية التوزيع
بالتبسيط

أتحقّق من فهمي:

1 $y^2 - 5y + 6$

2 $x^2 - 11x + 30$

إذا كانت إشارة c سالبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n إشارتين مختلفتين.

مثال 3 أحلّ $x^2 + x - 20$

في ثلاثي الحدود المُعطى $b = 1, c = -20$ ، وهذا يعني أنّ إشارة $m + n$ موجبة وإشارة nm سالبة. إذن، يجب أن تكون إشارة n أو m سالبة، وليس كليهما. أنشئ قائمة منظمة من أزواج عوامل العدد (-20) مختلفة الإشارة، وأحدّد زوج العوامل الذي مجموعهُ 1

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد (-20) مختلفة الإشارة	1, -20	-1, 20	2, -10	-2, 10	4, -5	-4, 5
مجموع العاملين	-19	19	-8	8	-1	1

$$x^2 + x - 20 = (x + m)(x + n)$$

$$= (x - 4)(x + 5)$$

أكتب القاعدة

$$m = -4, n = 5 \text{ أعوض}$$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(x - 4)(x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20$$

$$= x^2 + x - 20 \quad \checkmark$$

خاصية التوزيع
بالتبسيط

أتحقق من فهمي: 

1 $x^2 + 2x - 8$

2 $x^2 - x - 42$

يُستعمل التحليل لإيجاد مقدار جبري يمثل طول أو عرض مستطيل مساحته معطاة على صورة ثلاثي حدود $x^2 + bx + c$ ، حيث يمثل الطول والعرض عاملَي ثلاثي الحدود.



مثال 4: من الحياة 

يمثل ثلاثي الحدود $x^2 + 9x + 18$ مساحة مرآة مستطيلة الشكل بالمتري المربع. إذا كان عرض المرآة $(x + 3)$ متراً، فأجد كلاً من طولها ومحيطها بدلالة x .

الخطوة 1 أجد طول المرآة بدلالة x .

يمثل عرض المرآة $(x + 3)$ أحد عاملَي $x^2 + 9x + 18$ إذن $m = 3$

أبحث عن قيمة n التي ناتج ضربها في 3 يساوي 18 وناتج جمعها إلى العدد 3 يساوي 9

إذن، $n = 6$ ، والمقدار الجبري الذي يمثل طول المرآة هو $(x + 6)$

الخطوة 2 أجد محيط المرآة بدلالة x .

$$P = 2l + 2w$$

$$= 2(x + 6) + 2(x + 3)$$

$$= 2x + 12 + 2x + 6$$

$$= 4x + 18$$

قانون محيط المستطيل

$$\text{أعوض: } l = (x + 6), w = (x + 3)$$

خاصية التوزيع

أجمع الحدود المتشابهة

إذن، محيط المرآة يساوي $(4x + 18)$ متراً.

الوحدة 2



أتحقق من فهمي: ✓

يمثل ثلاثي الحدود $x^2 - 25x + 100$ مساحة باب مستطيل الشكل بالمتري المربع. إذا كان طول الباب $(x - 5)$ متراً، فأجد كلاً من عرضه ومحيطه بدلالة x .

أدرب وأحل المسائل

أحل كل ما يأتي:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1 $x^2 + 2x - 24$ | 2 $y^2 + 3y - 10$ | 3 $x^2 + 29x + 100$ |
| 4 $w^2 - 6w + 8$ | 5 $-10q + q^2 + 21$ | 6 $y^2 + 20y + 100$ |
| 7 $a^2 + 5a + 6$ | 8 $w^2 - 9w - 10$ | 9 $x^2 + x - 30$ |
| 10 $13y + 30 + y^2$ | 11 $w^2 + 11w + 18$ | 12 $t^2 - t - 90$ |
| 13 $f^2 + 22f + 21$ | 14 $h^2 - h - 72$ | 15 $m^2 - 18m + 81$ |

يمثل كل ثلاثي حدود ما يأتي مساحة مستطيل بالمتري المربع. أجد مقدارين جبريين يمثلان طولاً وعرضاً ممكنين لكل مستطيل.

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 16 $x^2 + x - 72$ | 17 $x^2 - 8x - 9$ | 18 $x^2 + 2x - 48$ |
|-------------------|-------------------|--------------------|

أحل كل ما يأتي:

- | | | |
|----------------------------|------------------------|------------------------|
| 19 $3x^3y + 18x^2y - 21xy$ | 20 $2x^3 - 2x^2 - 4x$ | 21 $2x^3 - 4x^2 - 6x$ |
| 22 $5x^3y - 35x^2y + 50xy$ | 23 $3x^3 + 12x^2 + 9x$ | 24 $4x^3 - 8x^2 - 12x$ |

إرشاد

أولاً: أخرج العامل المشترك الأكبر للحدود الثلاثة، ثم أحلل.

إرشاد

مؤسسة الحسين للسرطان
مكرسة لمكافحة مرض
السرطان، وتتضمن
مهامها: جمع التبرعات،
وحشد الجهود لمكافحة
السرطان، وتنفيذ برامج
الوقاية منه، والكشف
المبكر عنه.

25

صحة: تقوم مؤسسة الحسين للسرطان بحملة توعية بأهمية الفحص المبكر للسرطان، عن طريق لوحات إعلانية مستطيلة الشكل على الطرقات. إذا كانت مساحة إحدى هذه اللوحات $(x^2 + 14x + 48)$ متراً مربعاً وعرضها $(x + 6)$ متراً، فأجد طول اللوحة ومحيطها بدلالة (x) .



ورق صحي: علبة ورق صحي على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $x^3 + 5x^2 + 4x$ سنتيمتراً مكعباً. أجد قياساً ممكناً لكل من طول العلبة وعرضها وارتفاعها بدلالة x .

26

مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد 3 قيم ممكنة للعدد الصحيح m في كل مما يأتي، بحيث يكون ثلاثي الحدود قابلاً للتحليل، ثم أحلله:

27 $x^2 + mx - 15$

28 $x^2 - 7x + m$

تحذ: أحل المقدار $(x - 3)^2 - 2(x - 3) - 8$

29

إرشاد

يمكنني فك الأقواس ثم
التحليل، ويمكنني أيضاً
فرض أن $y = x - 3$
واتمام الحل.

30

تحذ: في الشكل المجاور مستطيل بعده $x + a$, $x + b$ ، قسّم إلى أربعة أجزاء مساحة اثنين منها x^2 و 6 وحدات مربعة، أيقن أنه توجد قيمتان ممكنتان لكل من a و b .

x^2	
	6

أكتشف الخطأ: حلل كل من آدم وماريا العبارة $y^2 + 6y - 16$ على النحو الآتي:

31

ماريا

$$y^2 + 6y - 16 = (y + 2)(y - 8)$$

آدم

$$y^2 + 6y - 16 = (y - 2)(y + 8)$$

من منهما إجابتة صحيحة؟ أبرر إجابتي.

32

أكتب: كيف أحدد قيمة كل من m و n عند تحليل $y^2 - 3y - 4$ على صورة $(y + m)(y + n)$ ؟



أستكشف

يُستعمل المقدار الجبري
 $\frac{1}{2} dv^2 - \frac{1}{2} du^2$ لحساب

الفرق بين قيمتي الضغط الجوي فوق جناح الطائرة وأسفله، حيث d هي كثافة الهواء و v سرعة الهواء فوق الجناح و u سرعة الهواء أسفله. كيف أحل هذا المقدار الجبري تحليلًا كاملاً؟

فكرة الدرس

• أحل مقداراً جبرياً يمثل فرقاً بين مربعين.

• أحل مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود.

المصطلحات

مربع كامل ثلاثي الحدود.

تحليل

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

تبسيط

تعلمت سابقاً كيفية ضرب مقدارين جبريين على صورة $(a-b)(a+b)$ ، حيث يكون الناتج دائماً فرقاً بين مربعين على صورة $a^2 - b^2$. ولتحليل الفرق بين مربعين يمكن اتباع خطوات عكسية لعملية ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما.

تحليل الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** الفرق بين مربعي حدّين يساوي ناتج ضرب مجموع الحدّين في الفرق بينهما.

• **بالرموز:** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

مثال 1

أحلّ كلّ ممّا يأتي:

1 $x^2 - 25$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x - 5)(x + 5) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
 أحلّ الفرق بين مربعين

2 $4y^2 - 9z^2$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9z^2 &= (2y)^2 - (3z)^2 \\ &= (2y - 3z)(2y + 3z) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
 أحلّ الفرق بين مربعين

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $x^2 - 100$

4 $100y^2 - 36$

5 $81d^2 - 49r^2$

6 $64c^2 - 1$

يحتاج تحليل بعض المقادير الجبرية إلى إجراء خطوتين، مثل إخراج العامل المشترك الأكبر للحدود جميعها، ثم تحليل ما تبقى من المقدار باستعمال قاعدة تحليل الفرق بين مربعين.

مثال 2

أحل كل ما يأتي:

1 $27xy^3 - 3xy$

$$\begin{aligned} 27xy^3 - 3xy &= 3xy(9y^2 - 1) \\ &= 3xy(3y - 1)(3y + 1) \end{aligned}$$

أحل بإخراج العامل المشترك الأكبر
أحل المقدار $9y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

2 $y^4 - 1$

$$\begin{aligned} y^4 - 1 &= (y^2)^2 - (1)^2 \\ &= (y^2 - 1)(y^2 + 1) \\ &= (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
أحل الفرق بين مربعين
أحل المقدار $y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

3 $2b^2 - 18 + ab^2 - 9a$

$$\begin{aligned} 2b^2 - 18 + ab^2 - 9a &= (2b^2 - 18) + (ab^2 - 9a) \\ &= 2(b^2 - 9) + a(b^2 - 9) \\ &= (b^2 - 9)(2 + a) \\ &= (b - 3)(b + 3)(2 + a) \end{aligned}$$

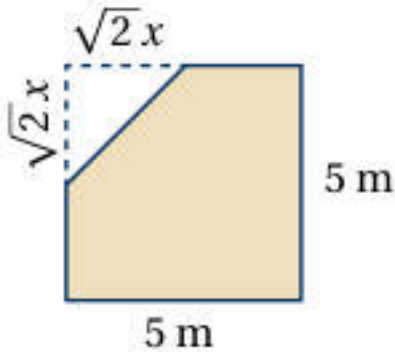
أجمع الحدود ذات العامل المشترك
أحل كل تجمع بإخراج العامل المشترك
أخرج المقدار $(b^2 - 9)$ عاملاً مشتركاً
أحل المقدار $(b^2 - 9)$ كفرق بين مربعين

✓ **أتحقق من فهمي:**

4 $b^4 - c^4$

5 $6w^3 - 24w$

6 $4m^4 - 9m^2 + 8m^2k - 18k$



هندسة معمارية: يبين الشكل المجاور مخطط غرفة جلوس في منزل رغد. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الغرفة، ثم أحله.

مساحة الغرفة تساوي ناتج طرح مساحة المثلث من مساحة المربع.

الخطوة 1 أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الغرفة:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= s^2 && \text{مساحة المربع} \\
 &= (5)^2 = 25 && \text{بتعويض } s = 5 \\
 A_2 &= \frac{1}{2}bh && \text{مساحة المثلث} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = x^2 && \text{بتعويض } b = x, h = x \\
 A &= A_1 - A_2 && \text{مساحة الغرفة} \\
 &= 25 - x^2 && \text{بالتعويض}
 \end{aligned}$$

إذن، مساحة الغرفة تساوي $25 - x^2$ متراً مربعاً.

الخطوة 2 أحل المقدار $25 - x^2$

$$25 - x^2 = 5^2 - x^2$$

$$= (5 - x)(5 + x)$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$

أحل الفرق بين مربعين

$$25 - x^2 = (5 - x)(5 + x) \text{، إذن،}$$

أتحقق من فهمي:



أعمال فنية: صنع مراد إطار صورة خشبياً دائرياً كما في الشكل المجاور. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الإطار الخشبي، ثم أحله.

تعلمتُ سابقًا أن أعدادًا مثل 25, 49, 64 تسمى مربعاتٍ كاملة؛ لأنَّ كلًّا مِنْهَا يساوي ناتج ضربٍ عددٍ في نفسه:

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$49 = 7 \times 7 = 7^2$$

$$64 = 8 \times 8 = 8^2$$

ويعدُّ المقدارُ الجبريُّ الذي على صورة $(a + b)^2$ مربعًا كاملًا أيضًا؛ لأنَّه يساوي ناتج ضرب $(a + b)$ في نفسه. وتعلمتُ في الدرس الأول من هذه الوحدة أنَّ تبسيط $(a + b)^2$ و $(a - b)^2$ يتبع قاعدة ثابتة، وأنَّ النتيجة تكون دائمًا مقدارًا جبريًا يحتوي ثلاثة حدودٍ كما يأتي:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

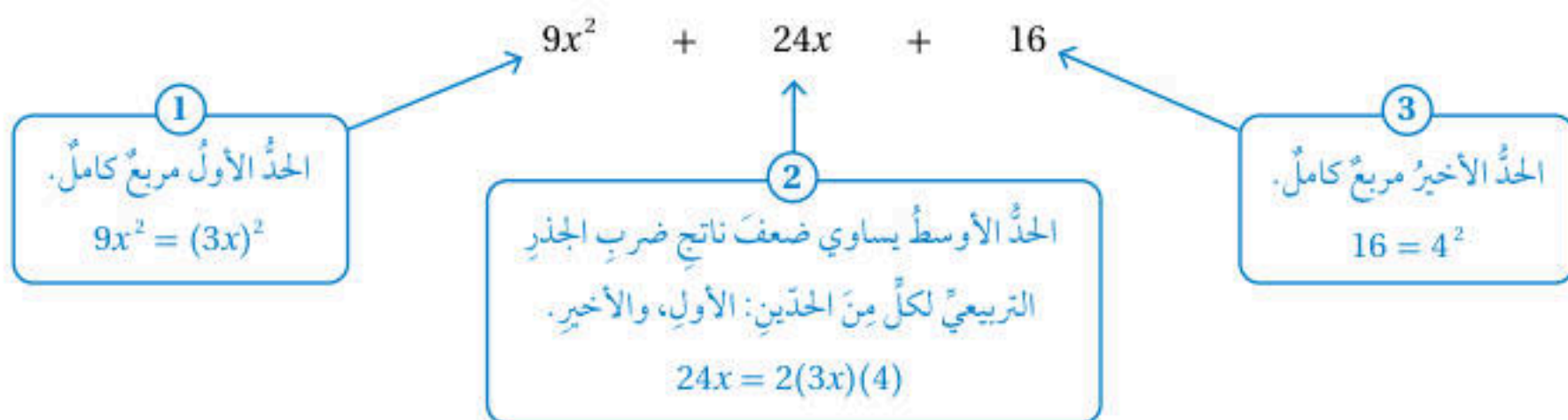
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

يسمى ناتج الضرب في كلِّ من الحالتين أعلاه **مربعًا كاملًا ثلاثي الحدود** (perfect-square trinomial)؛ لأنَّه ينتج من ضرب مقدارٍ جبريٍّ في نفسه، ويمكنُ بطريقةٍ عكسيةٍ تحليلُ أيِّ ثلاثي حدودٍ على صورة $a^2 + 2ab + b^2$ إنَّ كان يمثلُ مربعًا كاملًا إذا حققَ الشروطَ الثلاثة الآتية:



تحليل المربع الكامل الثلاثي الحدود

مفهوم أساسي

• **بالرموز:** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

• **مثال:** $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2 = (5x - 3)(5x - 3)$

أحدد ما إذا كانت كل ثلاثية حدودٍ ممّا يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثلها فأحلّها:

1 $x^2 + 6x + 9$

- هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم
- هل الحدّ الأوسط يساوي $2 \times x \times 3$ ؟ نعم؛ لأنّ $6x = 2(x)(3)$
- هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأنّ $9 = 3^2$

بما أن الشروط جميعها متحققة، فإنّ $x^2 + 6x + 9$ تشكّل مربعاً كاملاً.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 && \text{أكتب بصورة } a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) && \text{أحلّ} \end{aligned}$$

2 $x^2 + 2x + 16$

- هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم
- هل الحدّ الأوسط يساوي $2 \times x \times 4$ ؟ لا؛ لأنّ $2x \neq 2(x)(4)$
- هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأنّ $16 = 4^2$

بما أن الشرط الثاني غير متحقق، فإنّ $x^2 + 2x + 16$ ليست مربعاً كاملاً، ولا يمكن تحليلها.

أتحقق من فهمي: 

3 $x^2 - 24x + 144$

4 $4x^2 - 12x + 9$

5 $x^2 + 10x + \frac{1}{25}$

حين لا تُساوي قيمة العامل المشترك الأكبر لحدود المقدار الجبري 1، فإنّ من الأسهل البدء بإخراج العامل المشترك الأكبر، ثمّ اختيار طريقة التحليل المناسبة بحسب الترتيب المبين في الجدول الآتي:



طريقة التحليل	عدد الحدود الجبرية
إخراج العامل المشترك الأكبر	2 أو أكثر
الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	2
مربع كامل ثلاثي الحدود $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	3
$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$	$x^2 + bx + c$
$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$	4 أو أكثر

أدرب وأحل المسائل

أحل كل مما يأتي:

1 $u^2 - 64$

2 $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{25}$

3 $36y^2 - 1$

4 $v^4 - 625r^2$

5 $a^2 - w^2z^2$

6 $-16y^2 + 49$

أحل كل مما يأتي:

7 $ab^2 - 100a$

8 $x - x^3$

9 $12b^3 + 2b^2 - 192b - 32$

10 $d^3 - 5d^2 - 100d + 500$

أحدد أن كل ثلاثية حدود مما يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثله فأحلها:

11 $w^2 - 18w + 81$

12 $x^2 + 2x - 1$

13 $y^2 + 8y + 16$

14 $9x^2 - 30x + 10$

أتذكر

أتذكر أن:

$$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2$$

أحللُ كلًّا مما يأتي:

15 $3t^3 + 24t^2 + 48t$

17 $27g^2 - 90g + 75$

19 $5x^2 - 60x + 180$

21 $12x^2 - 84x + 147$

16 $50g^2 + 40g + 8$

18 $18y^2 - 48y + 32$

20 $16r^3 - 48r^2 + 36r$

22 $4x^2 - 80x + 400$

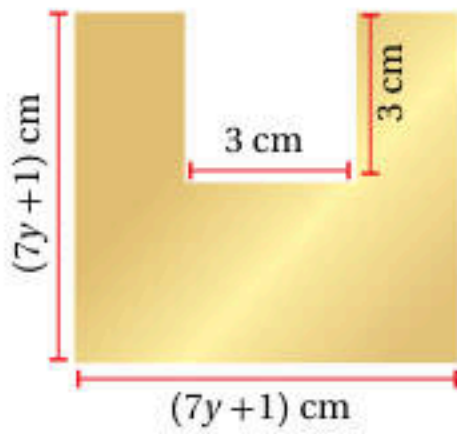
معلومة

درجة الانصهار هي درجة الحرارة التي تتحول عندها المادة من الحالة الصلبة إلى الحالة السائلة، ودرجة انصهار النحاس 1085°C



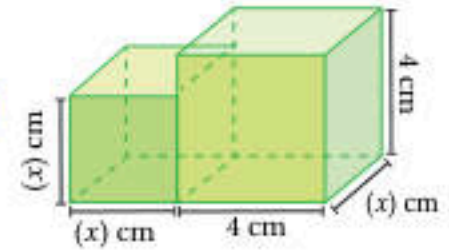
23

نحاس: يبين الشكل المجاور صفيحة من النحاس قبل صهرها وتحويلها إلى مستطيل له المساحة نفسها، أجد قياسين ممكنين لطول المستطيل وعرضه بدلالة y .



24

يبيّن الشكل المجاور مخططاً لمستودع تخزين متجاورين. أكتب مقداراً جبرياً يمثل الفرق بين حجمي المستودعين، ثم أحله.



مهارات التفكير العليا

25

تحذّر: مثلث قائم الزاوية مساحته $9y^2 - 16$ وحدة مربعة. أجد قياسين ممكنين لطول قاعدته وارتفاعه بدلالة y .

26

أكتشف الخطأ: حلّ إبراهيم المقدار $n^2 - 64$ تحليلًا كاملاً على النحو الآتي:
هل إجابته صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

$$\begin{aligned} n^2 - 64 &= n^2 - 8^2 \\ &= (n-8)^2 \end{aligned}$$

27

تبرير: أصف طريقتين لتبسيط $(2x-5)^2 - (x-4)^2$ ، وأبين أي الطريقتين أسهل، وأبرّر إجابتي.

28

أكتب: أكتب طريقة تحليل فرقي بين مربعين.

أستكشف



يمثل المقدار الجبري $x^3 + 5x^2 + 4x$ حجم حجر بناء عازل للحرارة بالسنتيمتر المكعب. إذا كانت مساحة قاعدة الحجر $(x^2 + x)$ سنتيمترًا مربعًا، فأجد ارتفاعه بدلالة x .

فكرة الدرس

أكتب مقادير جبرية نسبية في أبسط صورة.

المصطلحات

المقدار الجبري النسبي.

المقدار الجبري النسبي (rational algebraic expression) هو كسر بسطه ومقامه مقداران جبريان.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$\frac{6xy^4}{5y}$$

$$\frac{3a - 2}{a^2 + 6a + 8}$$

مقادير جبرية نسبية

يكون المقدار الجبري النسبي في أبسط صورة إذا كان العامل المشترك الأكبر لكل من بسطه ومقامه يساوي 1

مثال 1

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y}$

$$\begin{aligned} \frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y} &= \frac{(5x^2 y)(-y^2)}{(5x^2 y)(4x^2)} \\ &= \frac{\cancel{5x^2 y}(-y^2)}{\cancel{5x^2 y}(4x^2)} \\ &= \frac{-y^2}{4x^2} \end{aligned}$$

العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام يساوي $(5x^2 y)$

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(5x^2 y)$

أبسط

أتحقق من فهمي: ✓

2 $\frac{35yz^2}{14y^2z}$

3 $\frac{14a^3 b^2}{42ab^3}$

الوحدة 2

يمكنني استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لاختصار أي عوامل مشتركة لكل من بسط المقدار الجبري النسبي ومقامه.

مثال 2

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{6x + 12}{6}$

$$\frac{6x + 12}{6} = \frac{6(x + 2)}{6}$$

$$= (x + 2)$$

أخرج العدد (6) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم كلاً من البسط والمقام على (6)

2 $\frac{2x^2 + 2x}{2x}$

$$\frac{2x^2 + 2x}{2x} = \frac{2x(x + 1)}{2x}$$

$$= \frac{\cancel{2x}(x + 1)}{\cancel{2x}} = x + 1$$

أخرج (2x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم البسط والمقام على (2x)

3 $\frac{x - 1}{x^3 - x^2}$

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2} = \frac{x - 1}{x^2(x - 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 1)}}{x^2\cancel{(x - 1)}} = \frac{1}{x^2}$$

أحلل المقام

أقسم كلاً من البسط والمقام على (x-1)

أتحقق من فهمي:

4 $\frac{2x + 2}{2}$

5 $\frac{16x^2 + 8x}{2x + 1}$

6 $\frac{x - 2x^2}{8 - 16x}$

يمكن استعمال طريقة التجميع - التي تعلمتها سابقاً - في هذه الوحدة لتحليل بسط المقدار الجبري النسبي أو مقامه أو كليهما واختصار أي عوامل مشتركة لهما. وعند تحليل بسط المقدار الجبري النسبي ومقامه ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً (6-x) - هو معكوس (x-6)؛ لأن (6-x) = -1(x-6)؛ لذا أكتب $\frac{(6-x)}{(x-6)}$ على صورة $\frac{-1(x-6)}{(x-6)}$

مثال 3

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y}$

$$\frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y} = \frac{(5xy - 10x) + (2y - 4)}{2 - y}$$

$$= \frac{5x(y - 2) + 2(y - 2)}{2 - y}$$

$$= \frac{(y - 2)(5x + 2)}{(2 - y)}$$

$$= \frac{(y - 2)(5x + 2)}{-(y - 2)}$$

$$= \frac{\cancel{(y - 2)}(5x + 2)}{\cancel{-(y - 2)}} = -(5x + 2)$$

أجمع الحدود ذات العامل المشترك

أحل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

أخرج $y - 2$ عاملاً مشتركاً لحدود البسط

اكتب $(2 - y)$ على صورة $-(y - 2)$

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(y - 2)$

✓ **أتحقق من فهمي:**

2 $\frac{2ab - 6b + 6 - 2a}{a - 3}$

3 $\frac{5h - 3g}{3g^2 - 5gh + 3g - 5h}$

تحتوي بعض المقادير الجبرية النسبية ثلاثيات حدود على الصورة $x^2 - bx + c$ أو مقادير جبرية على صورة فرقي بين مربعين، ويمكنني استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لتحليل هذه المقادير الجبرية، واختصار أي عوامل مشتركة لكل من بسط المقادير الجبرية النسبية ومقامه.

مثال 4

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 1)}{\cancel{x - 2}} = x - 1$$

أحل ثلاثية الحدود

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(x - 2)$

الوحدة 2

2 $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16}$

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x-4)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+2}{x-4}$$

أحلل ثلاثية الحدود في البسط والفرق بين المربعين في المقام

أقسم كلا من البسط والمقام على $(x + 4)$

3 $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x}$

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x} = \frac{(x+5)^2}{x^2 + 5x}$$

$$= \frac{(x+5)(x+5)}{x(x+5)}$$

$$= \frac{(x+5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x+5)}} = \frac{x+5}{x}$$

أحلل ثلاثية الحدود في البسط

أخرج x عاملاً مشتركاً لحدود المقام

أقسم كلا من البسط والمقام على $(x + 5)$

أتحقق من فهمي:

4 $\frac{x^2 - 12x + 36}{x - 6}$

5 $\frac{x^2 + 9x + 8}{x^2 - 64}$

6 $\frac{x^2 + 8x + 16}{2x + 8}$

يُستعمل تبسيط المقادير الجبرية النسبية في كثير من التطبيقات العلمية والهندسية.

مثال 5: من الحياة



تحفظ عائشة ألعابها في صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه $x^3 + 11x^2 + 10x$ سنتيمتراً مكعباً وارتفاعه $(x + 1)$ سنتيمتراً. أجد مساحة قاعدة الصندوق بدلالة x

حجم الصندوق V يساوي مساحة القاعدة B مضروباً في الارتفاع h . إذن، مساحة القاعدة تساوي ناتج قسمة الحجم على الارتفاع.

قانون مساحة القاعدة

$$B = \frac{V}{h}$$

أعوّض

$$= \frac{x^3 + 11x^2 + 10x}{(x+1)}$$

أخرج (x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

$$= \frac{x(x^2 + 11x + 10)}{(x+1)}$$

أحلل ثلاثية الحدود التي داخل القوس

$$= \frac{x(x+10)(x+1)}{(x+1)}$$

أبسط

$$= x(x+10)$$

إذن، مساحة قاعدة الصندوق $x(x+10)$ cm



أتحقق من فهمي:



مخروط مثلجات حجمه $w^3 - 49w$ سنتيمتراً مكعباً، ومساحة قاعدته $w^2 + 7w$ سنتيمتراً مربعاً، أجد ارتفاعه بدلالة w .

أدرب وأحل المسائل



أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{64qr^2s}{16q^2rs}$

2 $\frac{24a^3b^4c^7}{6a^6c^2}$

3 $\frac{y^2+yz-y-z}{y+z}$

4 $\frac{n^2-9}{n^2-5n+6}$

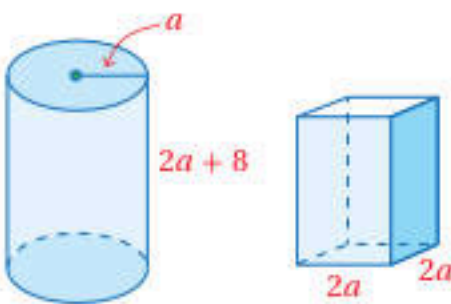
5 $\frac{x^2-x-30}{x^2-36}$

6 $\frac{w^4-1}{1-w^2}$

7 $\frac{4x^3-12x^2+8x}{6x^3+6x^2-36x}$

8 $\frac{x^2-81}{2x-18}$

9 $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+15}$



10 **قياس:** يظهر في الشكل المجاور عبوتنا معلبات غذائية لهما الحجم نفسه. أجد ارتفاع العبوة التي على شكل متوازي مستطيلات بدلالة a .



انتخابات: صندوق اقتراع على هيئة متوازي مستطيلات، حجمه $(x^3 - 8x^2 + 15x)$ سنتيمتراً مكعباً، ومساحة قاعدته $(x^2 - 3x)$ سنتيمتراً مربعاً، أجد ارتفاع الصندوق.

11

معلومة

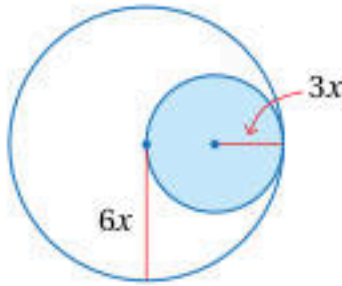
تأسست الهيئة المستقلة للانتخابات عام 2012 بوصفها جهة مستقلة تُعنى بإدارة الانتخابات في المملكة الأردنية الهاشمية والإشراف عليها.

12

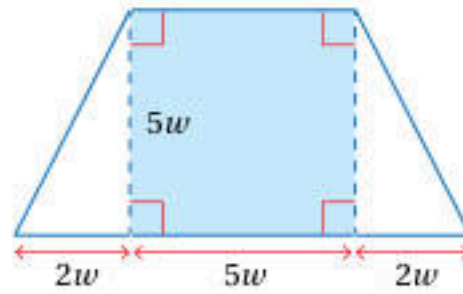
هندسة: المستطيل A طوله $(2x + 6)$ وحدة وعرضه $(3x)$ وحدة، والمستطيل B طوله $(x + 2)$ وحدة ومساحته تزيد بمقدار 12 وحدة مربعة على مساحة المستطيل A . أكتب مقداراً جبرياً في أبسط صورة يمثل عرض المستطيل B .

هندسة: أكتب في أبسط صورة النسبة المئوية لمساحة المنطقة المظللة من الشكل في كل مما يأتي:

13



14



مهارات التفكير العليا

15

تحذ: كتبت سوسن مقداراً جبرياً نسبياً بأبسط صورة، ثم انسكب بعض القهوة على أجزاء من الحل، هل يمكن تحديد المقدار الجبري الأصلي؟

$$\frac{\text{شئ}}{\text{شئ}} = \frac{4x}{2(x+3)} = 2x$$

16

تحذ: مقدار جبري نسبي على صورة $\frac{x^2 + bx - c}{x^2 + d}$ ، وعند كتابته في أبسط صورة يصبح $\frac{x-7}{(x+2)}$ ، هل يمكن تحديد قيمة كل من b, c, d ؟

17

تحذ: أكتب المقدار الجبري الآتي في أبسط صورة:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + 11mn + 10n^2}$$

18

أكتب: أكتب فقرة أبين فيها كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 ناتج ضرب المقدار $(2x+4)(2x-4)$ يساوي:

a) $2x^2-16$ b) $4x^2-16$

c) $4x^2+16$ d) $4x-16$

2 مربع طول ضلعيه $(x-6)$ وحدة، فتكون مساحته:

a) $x^2+12x-36$ b) x^2-36

c) $x^2-12x+36$ d) x^2+36

3 المقدار الجبري الذي يمثل مربعاً كاملاً هو:

a) $y^2+26y+25$ b) $y^2-8y-16$

c) $y^2-8y+16$ d) y^2-25

4 قيمة b التي تجعل المقدار $(x^2+bx+144)$ مربعاً كاملاً هي:

a) 16 b) -12

c) 12 d) -24

5 تحليل المقدار $(4x^2y-4y)$ إلى عوامله الأولية تحليلًا كاملاً:

a) $4y(x-1)(x+1)$ b) $4y(x^2-1)$

c) $(2x-2)(2x+2)$ d) $(x-1)(x+1)$

6

قطعة أرض مستطيلة الشكل، مساحتها $(x^2+3x-10)$ وحدة مربعة، إذا كان أحد أبعادها $(x+5)$ وحدة، فإن بُعدها الآخر هو:

a) $x-2$ b) $x+2$

c) $x-5$ d) $x+10$

7 $\frac{x^2-36}{6-x}$

a) $-x-6$ b) $x-6$

c) $x+6$ d) $6-x$

8

تحليل المقدار w^4-1 إلى عوامله الأولية تحليلًا كاملاً:

a) $(w-1)(w+1)$ b) $(w-1)(w+1)(w^2+1)$

c) $(w-1)(w^3+1)$ d) $(w-1)(w^2+2w+1)$

9

يقبل المقدار الجبري x^2-100 القسمة من دون باقي على:

a) $x+100$ b) $x-5$

c) $x-100$ d) $x-10$

أكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

10 $(2x-7)(2x+7)$ 11 $(6y-3x)(6y-3x)$

12 $(x-4)^2$ 13 $(3d+6)^2$

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

26 $\frac{5x+15}{x^2+10x+21}$

27 $\frac{2x^2+6x+4}{3x^2+9x+6}$

تدريب على الاختبارات الدولية

28 أي الآتي عاملان لثلاثي الحدود x^2+x-42 ؟

a) $(x-7)(x-6)$ b) $(x+7)(x-6)$

c) $(x-7)(x+6)$ d) $(x+7)(x+6)$

29 عند كتابة المقدار الجبري $(2x+5)(2x-5)$ في أبسط صورة ينتج:

a) $4x^2-20x-25$ b) $4x^2+20x+25$

c) $4x^2-25$ d) $2x^2-5$

30 إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن حاصل ضرب عدد سابق في عدد لاحق له يُعطى بالعلاقة:

a) n^2-1 b) n^2+1

c) n^2-2 d) $(n+1)^2$

31 إذا كان $a-b=3$ ، $a^2-b^2=33$ ، فأجد قيمة $a+b$:

a) 14 b) 30 c) 36 d) 11

أحل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

14 $3yw^2-12y+2w^2-8$

15 $x^2-10x+25$

16 $9y^2-4$



17 يبين الشكل المجاور مهبطاً

للتائرات العمودية في إحدى

المستشفيات، فإذا كان طول

نصف قطر الدائرة الصغرى يقل 8 أمتار عن طول

نصف قطر الدائرة الكبرى، فأكتب مقدارا جبرياً يمثل

الفرق بين مساحتي الدائرتين، ثم أحله تحليلًا كاملاً.

18 كرة قدم: ملعب كرة قدم مساحته $(x^2-28x-29)$

متراً مربعاً، وطوله $(x+1)$ متراً، أجد محيطه بدلالة x .

أحل كل من المقادير الجبرية الآتية تحليلًا كاملاً:

19 $4s^2-s+12st-3t$

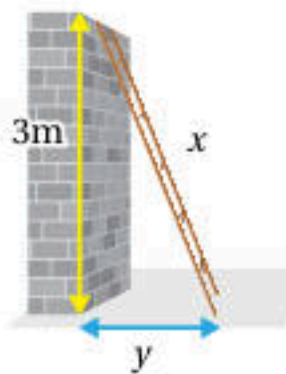
20 $6m^3-12mn+m^2n-2n^2$

21 $x^2-18x+72$

22 $3x^2-48$

23 $100-(x+9y)^2$

24 $3x^2-15x+18$



25 يستند سلم إلى حائط كما في

الشكل المجاور. إذا كان طول

السلم x وارتفاع الحائط $3m$ ،

فأجد المقدار الجبري الذي

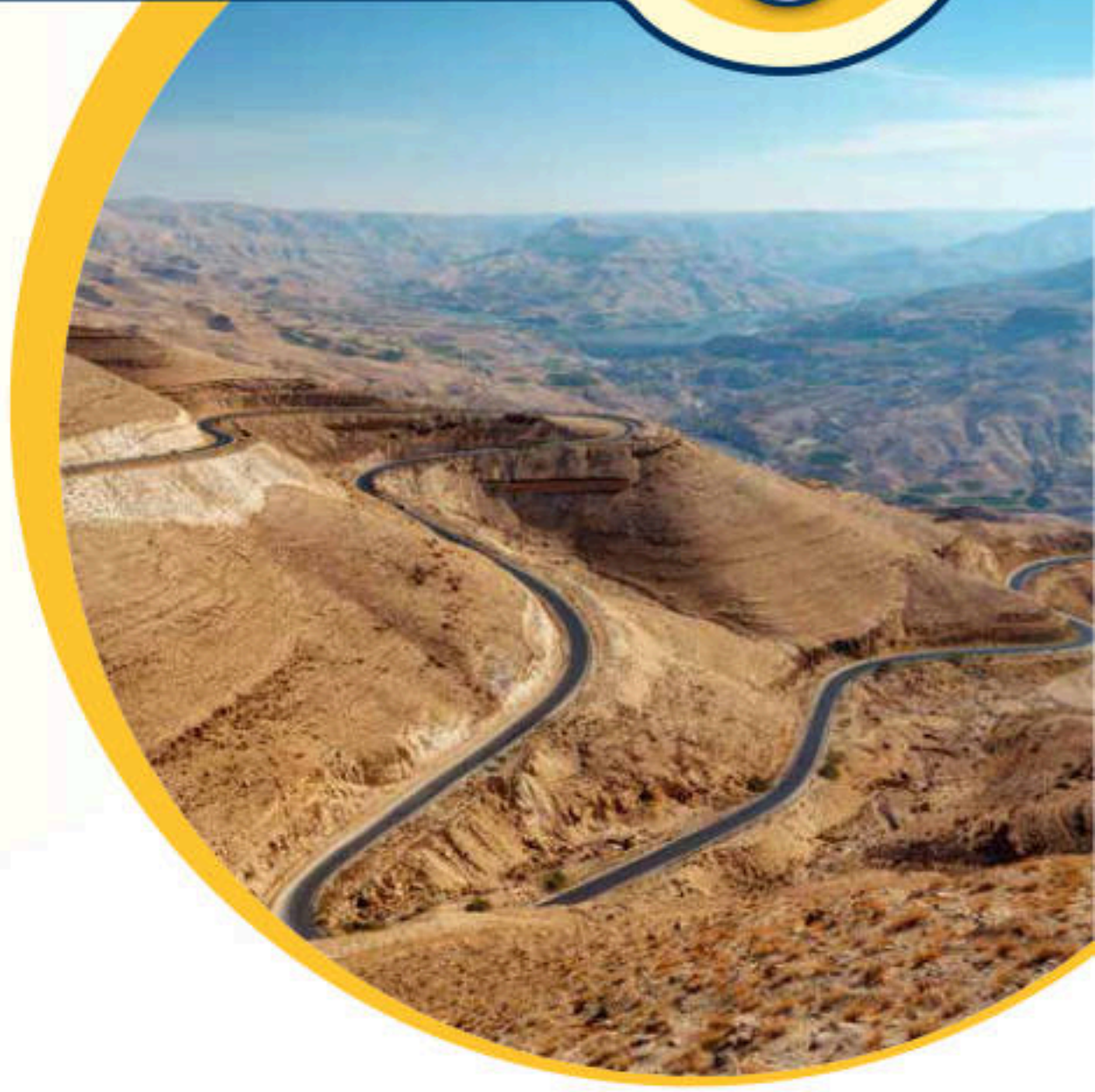
يمثل مربع المسافة الأفقية بين

الحائط والسلم، ثم أحله.

المعادلات الخطية بمتغيرين

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المعادلات الخطية في نمذجة المواقف العلمية والحياتية، ويقدم لنا مفهوم ميل منحنى المعادلة الخطية تفسيراً لكيفية تغير كمية بالنسبة إلى كمية أخرى، مثل تحديد شدة انحدار الطرق بإيجاد نسبة تغير الارتفاع إلى المسافة الأفقية المقطوعة؛ وذلك لتنبيه السائقين على الحذر عند القيادة في الطرق الشديدة الانحدار، مثل طريق وادي الموجب جنوب الأردن.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- إيجاد ميل الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة الخط المستقيم بطرائق متعددة.
- العلاقة بين ميلَي مستقيمين متوازيين ومتعامدين.

تعلمت سابقاً:

- ✓ التعبير عن الاقتران الخطي بطرائق متعددة.
- ✓ تمثيل الاقتران الخطي بيانياً.
- ✓ تمثيل التناسب الطردي بيانياً أو في جدول.



مشروع الوحدة: المعادلات الخطية والخريطة

- استعمل الرمز m بدلاً من الرمز a في مربع الحوار ليدل على الميل، ثم أعدد أقل قيمة وأعلى قيمة للميل (مثلاً أقل قيمة -20 وأعلى قيمة 20).

4 أكرّر الخطوة السابقة لإدراج مؤشر للتحكم في قيمة المقطع y ، واستعمل الرمز b بدلاً من الرمز a .

5 أكتب في شريط الإدخال معادلة المستقيم بصورة الميل والمقطع $(y = mx + b)$ ؛ ليظهر تمثيل بياني لمستقيم.

6 أحرك مؤشر الميل ومؤشر المقطع y لتغير موقع الخط؛ ليمر بمحافظتين أختارهما (مثلاً: الزرقاء والكرك)، ثم أجد ميل المستقيم المار بالمحافظتين والمقطع y له من خلال المعادلة في شريط الإدخال.

7 لتغيير صورة المعادلة إلى الصورة القياسية؛ أنقر بزر الفأرة الأيمن على صيغة المعادلة في شريط الإدخال، ثم أختار الصورة القياسية للمعادلة من القائمة المنسدلة.

8 أرسّم مستقيماً آخر في المستوى موازياً للمستقيم السابق مع الانتباه إلى اختيار رمزين آخرين للدلالة على الميل والمقطع y ، ثم أحركه حتى يمر في إحدى المحافظات على الخريطة، وأعدد معادلته وميله والمقطع y له.

9 أكرّر الخطوات السابقة مع محافظات أخرى.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) يُبين فيه خطوات العمل في المشروع، والنتائج التي توصلنا إليها موضحة بالصورة، ثم نعرضه على زملاء / الزميلات في مختبر الحاسوب.

• استعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي سنوظف فيه ما نتعلمه في هذه الوحدة عن تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن خريطة المملكة الأردنية الهاشمية، ثم أحفظها على جهاز الحاسوب.

2 استعمل برمجية جيوجبرا لتمثيل معادلات خطية تربط بعض المحافظات الأردنية إحداها بالأخرى من خلال الخطوات الآتية:

- أنقر على أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أختار صورة خريطة الأردن.

- أعدل موقع صورة الخريطة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B اللتين تظهران عليها.

3 لإدراج مؤشر للتحكم في قيمة الميل أتبع الإجراءات الآتية:

- أنقر على أيقونة

 Slider من

شريط الأدوات،

ثم أنقر على

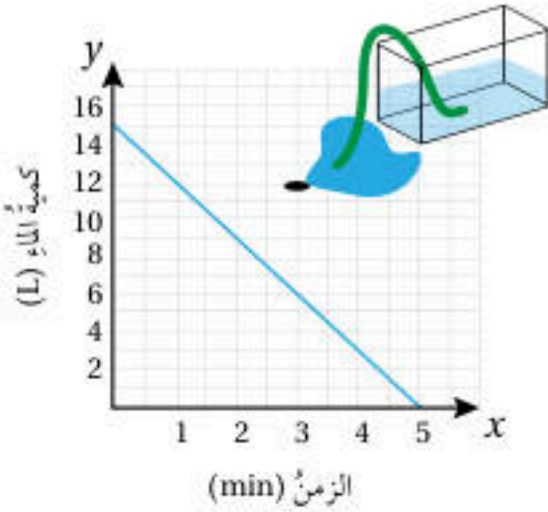
الموقع الذي أريده

في الشاشة ليظهر

مربع حوار.



أستكشف



يُبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين كمية الماء المتبقية في حوض بالترات والزمن المنقضي بالدقائق منذ بدء تصريف الماء من الحوض.

1 ما كمية الماء التي كانت في الحوض عند بدء التصريف؟

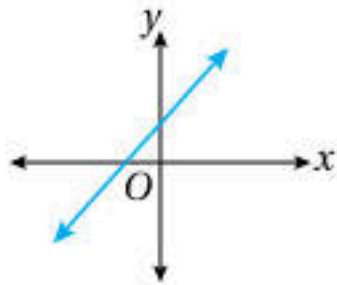
2 كم دقيقة يحتاج إليها تصريف الحوض من الماء تصريفًا كاملاً؟

فكرة الدرس

- تعرّف الصيغة القياسية للمعادلة الخطية.
- أمثل المعادلة الخطية بيانيًا.

المصطلحات

الصورة القياسية، الحد الثابت، المقطع x ، المقطع y



تعلمت سابقاً أن المعادلة الخطية هي المعادلة التي تُمثل بيانياً بخط مستقيم كما في الشكل المجاور. وتكتب المعادلة الخطية عادةً على الصورة $Ax + By = C$ ، والتي تُسمى **الصورة القياسية** (standard form) للمعادلة الخطية.

الصورة القياسية للمعادلة الخطية

مفهوم أساسي

- **بالكلمات** الصورة القياسية للمعادلة الخطية هي:

$$Ax + By = C$$

حيث A, B, C أعداد حقيقية، ولا تكون قيمتا A و B معاً صفراً.

يمكن استعمال الصورة القياسية لتحديد ما إذا كانت المعادلة خطية أم لا.

مثال 1

أحدد ما إذا كانت كل معادلة مما يأتي خطية أم لا:

1 $y = 6 - 5x$

أعيد كتابة المعادلة بحيث يكون كلا المتغيرين في الطرف نفسه من المعادلة.

$$y = 6 - 5x$$

المعادلة الأصلية

الوحدة 3

$$y + 5x = 6 - 5x + 5x$$

$$5x + y = 6$$

أُضيف $5x$ إلى طرفي المعادلة
أُبسطُ

المعادلة $5x + y = 6$ مكتوبة على الصورة $Ax + By = C$ ، حيث $A = 5, B = 1, C = 6$ ، إذن فهي معادلة خطية.

2 $3xy - 4x = 7$

بما أن الحد $3xy$ فيه متغيران، فإنه لا يمكن كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By = C$ ، إذن فهي ليست خطية.

3 $4x^2 - 8y = 12$

بما أن المتغير x مرفوع للأس 2، فإنه لا يمكن كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By = C$ ، إذن فهي ليست خطية.

4 $\frac{7}{5}x = -4$

يمكن كتابة المعادلة $\frac{7}{5}x = -4$ على الصورة $Ax + By = C$ كما يلي: $\frac{7}{5}x + 0y = -4$ ،

حيث $A = \frac{7}{5}, B = 0, C = -4$ ، إذن فهي معادلة خطية.

أتحقق من فهمي:

5 $2x = 1 - 3y$

6 $x^2 - 8y = 3$

7 $\frac{1}{5}y = 2$

التمثيل البياني للمعادلة الخطية هو مستقيم يمر في النقاط جميعها التي تمثل حلولاً للمعادلة، وأي نقطة تقع على هذا المستقيم تمثل حلاً للمعادلة.

أذكر

حل المعادلة الخطية هو الزوج المرتب الذي يتج عن تعويضه في المعادلة عبارة صحيحة.

يمكن تمثيل المعادلة بإنشاء جدول قيم، وذلك باختيار قيم للمتغير x وتعويضها في المعادلة لإيجاد قيم y المقابلة لها، ثم تمثيل الأزواج المرتبة الناتجة في المستوى الإحداثي.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $2x - y = 1$ بيانيًا.

الخطوة 1 أحل المعادلة بالنسبة إلى y ؛ لتسهيل عملية إيجاد قيم y المقابلة لقيم x .

$$2x - y = 1$$

$$2x - y - 2x = 1 - 2x$$

$$\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$$

$$y = 2x - 1$$

المعادلة الأصلية

أطرح $2x$ من كلا الطرفين

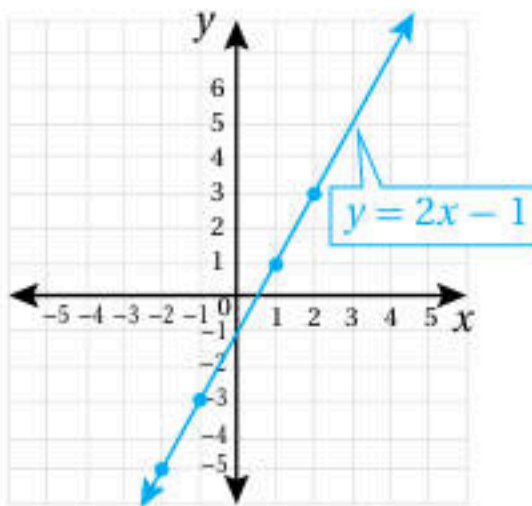
أقسم طرفي المعادلة على -1

أبسط

الخطوة 2 أنشئ جدول قيم.

أختار قيمًا للمتغير x ، ثم أعوضها في المعادلة لأجد قيم y المقابلة لها.

x	$2x - 1$	y	(x, y)
-2	$2(-2) - 1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$2(-1) - 1$	-3	$(-1, -3)$
0	$2(0) - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$2(1) - 1$	1	$(1, 1)$
2	$2(2) - 1$	3	$(2, 3)$



الخطوة 3 أمثل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي،

ثم أرسم مستقيمًا يمرُّ بها جميعًا.

أُتَعَلَّمُ

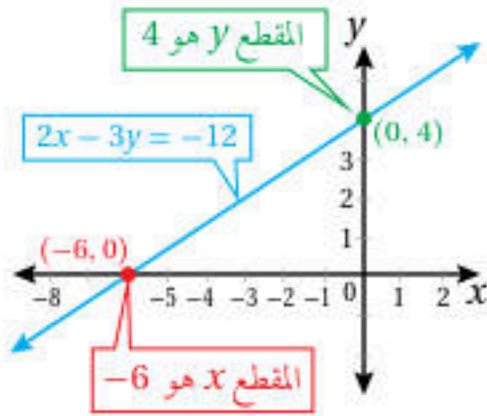
عند تمثيل المعادلة بيانيًا، أستخدم الأسهم لتوضيح أن المستقيم غير منتهٍ.

✓ أتدقق من فهمي:

3 أمثل المعادلة $2y - 4x = 6$ بيانيًا.

2 أمثل المعادلة $y = 3x$ بيانيًا.

الوحدة 3



بما أنه يمكن تمثيل المستقيم بنقطتين، فإن أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين (إن أمكن).

يُسمى الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور x **المقطع x** (x -intercept)، ويُسمى الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور y **المقطع y** (y -intercept).

عندما تكون المعادلة الخطية مكتوبة بالصورة القياسية، فإنه سهل تحديد المقطعين الإحداثيين وتمثيل المعادلة بيانياً.

مثال 3

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y :

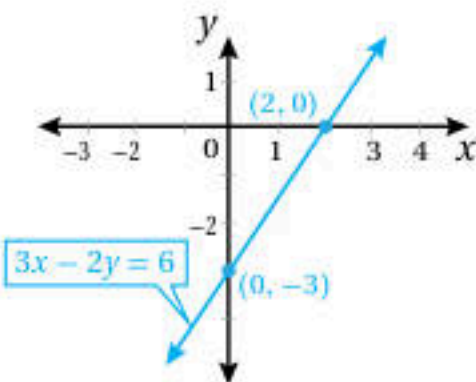
1 $3x - 2y = 6$

الخطوة 1 أجد المقطع x والمقطع y .

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3(0) - 2y &= 6 && \text{أعوّض } x = 0 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{6}{-2} && \text{أقسم كلا الطرفين على } -2 \\ y &= -3 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3x - 2(0) &= 6 && \text{أعوّض } y = 0 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} && \text{أقسم كلا الطرفين على } 3 \\ x &= 2 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، فالمقطع x هو 2، والمقطع y هو -3.



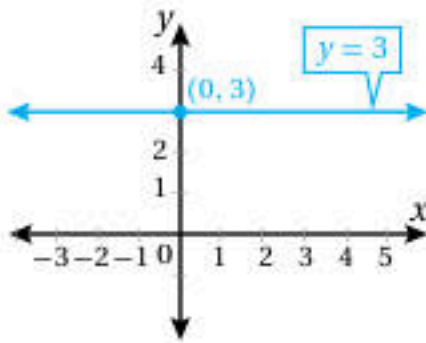
الخطوة 2 أمثل نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بين النقطتين.

بما أن المقطع x هو 2، فإن المستقيم يقطع المحور x في النقطة $(2, 0)$ ، وبما أن المقطع y هو -3، فإن المستقيم يقطع المحور y في النقطة $(0, -3)$ ، أمثل النقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بينهما.

2 $y = 3$

الخطوة 1 أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية $y = 3$
الصورة القياسية للمعادلة $0x + 1y = 3$



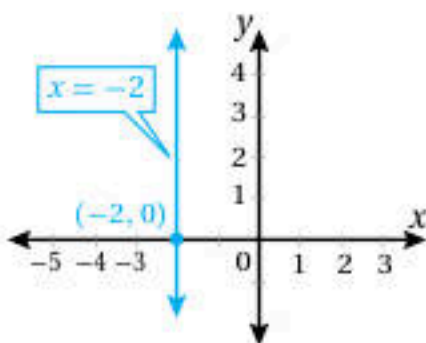
الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع y هو 3، ولا يوجد مقطع x ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $y = 3$ لأي قيمة x ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ هو مستقيم أفقي يقطع المحور y في النقطة $(0, 3)$.

3 $x = -2$

الخطوة 1 أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية $x = -2$
الصورة القياسية للمعادلة $1x + 0y = -2$



الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع x هو -2، ولا يوجد مقطع y ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $x = -2$ لأي قيمة y ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $x = -2$ هو مستقيم رأسي يقطع المحور x في النقطة $(-2, 0)$.

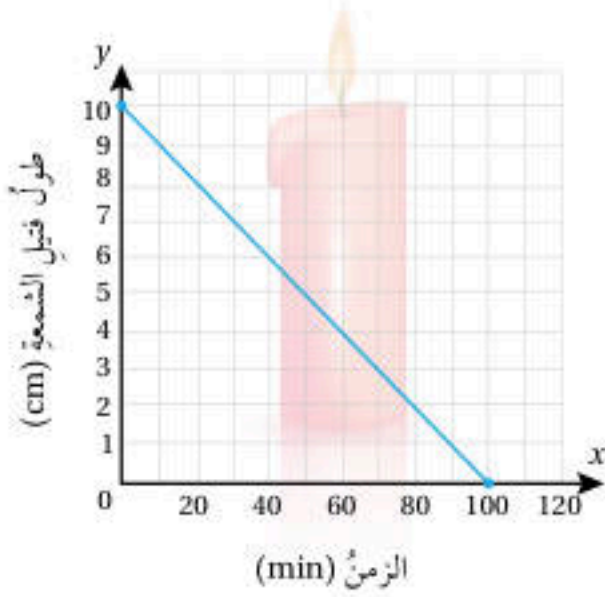
✓ أتحقق من فهمي:

4 $4x - y = 1$

5 $y = -7$

6 $x = 5$

مثال 4: من الحياة



شمعة: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين طول فتيل شمعة بالسنتيمترات و الزمن بالدقائق منذ بدء إشعاله.

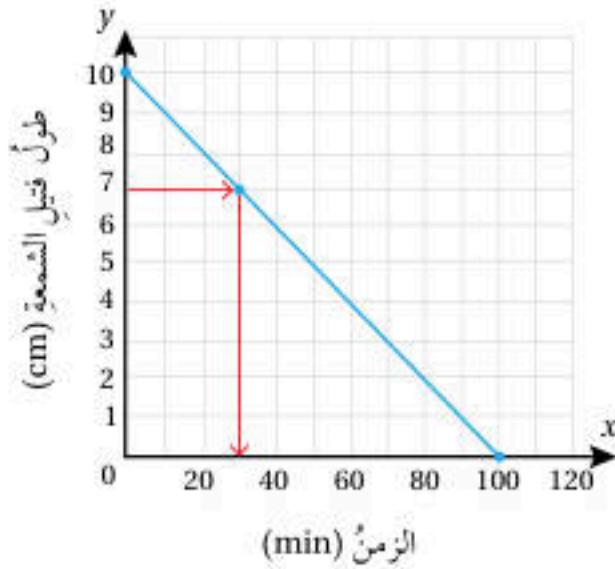
أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

المقطع x هو 100 قيمة $x = 100$ عندما قيمة $y = 0$

المقطع y هو 10 قيمة $y = 10$ عندما قيمة $x = 0$

2 أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

المقطع y يساوي 10 ويعني أن طول فتيل الشمعة 10 cm عند إشعاله، المقطع x يساوي 100 ، وهذا يعني أن فتيل الشمعة احترق احترقا كاملا بعد 100 دقيقة، ولم يبق منه شيء.



3 بعد كم دقيقة يكون طول فتيل الشمعة 7 cm ؟

أحدد 7 cm على المحور y ، ثم أحدد النقطة التي تقابلها على المستقيم، وأحدد الإحداثي x للنقطة وهو 30. إذن، يكون طول فتيل الشمعة 7 cm بعد 30 دقيقة من إشعاله.

أتحقق من فهمي:

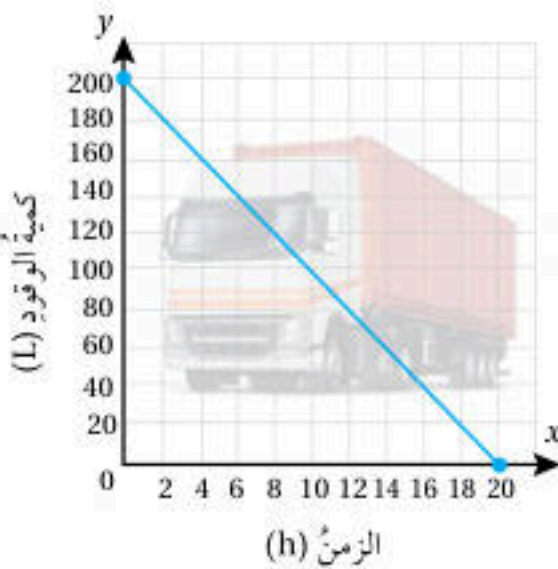


وقود: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين عدد لترات الوقود المتبقية في خزان شاحنة وعدد ساعات قيادتها.

4 أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

5 أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

6 بعد كم ساعة قيادة يبقى في خزان الشاحنة 100 L من الوقود؟



أحدّد ما إذا كانت كل معادلة ممّا يأتي خطيّة أم لا:

1 $2x = 7y$

2 $y = 1 - x^2$

3 $9xy + 11x = 6$

أمثّل كل معادلة ممّا يأتي بيانيًا بإنشاء جدول قيم:

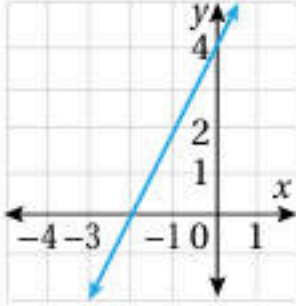
4 $y = -1$

5 $y - x = 8$

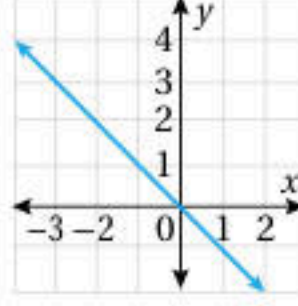
6 $3x + 2y = 15$

أجد المقطع x والمقطع y لكل معادلة ممّا يأتي:

7



8



أمثّل كل معادلة ممّا يأتي بيانيًا باستعمال المقطع x والمقطع y :

9 $x = 4y - 6$

10 $x + 6 = 0$

11 $\frac{4x}{3} = \frac{3y}{4} + 1$



رحلة: ملأ رامي خزان سيارته بالوقود استعدادًا لرحلة إلى مدينة العقبة. والمعادلة $y = 18 - 2x$ تعطي كمية الوقود بالترات المتبقية في خزان السيارة بعد قيادتها x ساعة.

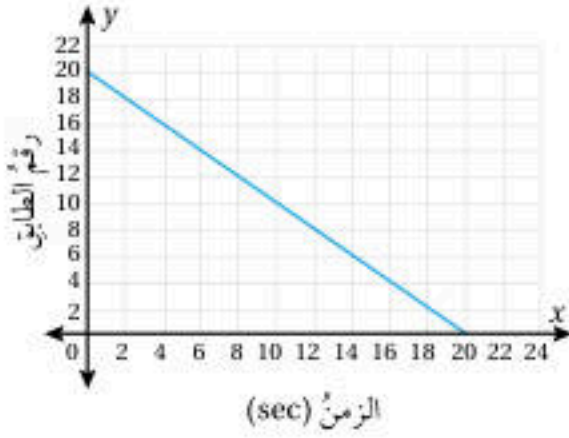
أجد المقطع x والمقطع y للمعادلة المُعطاة، ثم أستعمل المقطعين لتمثيل المعادلة بيانيًا.

أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

بعد كم ساعة من قيادة السيارة يتبقى $\frac{1}{4}$ الوقود في الخزان؟

الوحدة 3

بناءً: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين رقم الطابق في أحد الأبراج التجارية والزمن الذي يقضيه الراكب بالثواني في المصعد حتى يصل إلى هذا الطابق. فإذا علمت أن رقم الطابق الأرضي 0، فأجب عن كل مما يأتي:



15 من أي طابق صعد الراكب إلى المصعد؟

16 بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق الأرضي؟

17 بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق الثامن؟

أتذكر

الأعداد الكلية:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

هندسة: محيط المستطيل في الشكل المجاور 12 cm

18 أكتب معادلة بالصورة القياسية تمثل محيط المستطيل.

19 أجد المقطع x والمقطع y للتمثيل البياني لمعادلة محيط المستطيل.

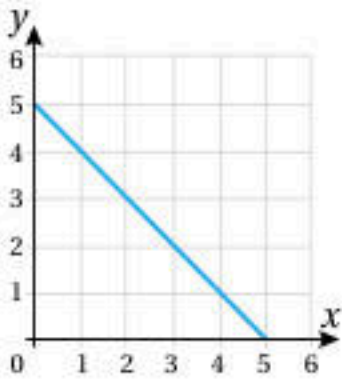
20 أمثل المعادلة بيانياً.

21 أجد ثلاثة أزواج مرتبة تمثل أبعاد المستطيل، على أن تكون قيم x و y أعداداً كلية.



مهارات التفكير العليا

تحذ: يبين التمثيل البياني المجاور المستقيم $x + y = 5$.



أرسم مستقيماً على الصورة $x = a$ ، ومستقيماً على الصورة $y = b$ ، على أن تكون المساحة بين المستقيمتين الثلاثة 4.5 وحدات مربعة.

23 **تبرير:** أمثل المعادلات $x = 5$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 1$ في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أحدد الشكل الهندسي المغلق الناتج عن المستقيمتين. أبرر إجابتي.

24 **أكتب:** كيف أكتب معادلة خطية بالصورة القياسية؟

أستكشف



تُستعمل إشارتا المرور المجاورتان لتنبيه السائقين على مقدار انحدار الطريق، وذلك بإيجاد نسبة الارتفاع أو الهبوط إلى كل 100 m أفقيًا. فما الفرق بين الإشارتين؟

فكرة الدرس

أجد ميل المستقيم.

المصطلحات

ميل المستقيم، التغير الرأسي، التغير الأفقي، معدل التغير.

ميل المستقيم (slope of a line) هو مصطلح يُستعمل لوصف مقدار انحدار المستقيم. فالميل هو نسبة التغير الرأسي (rise) إلى التغير الأفقي (run).

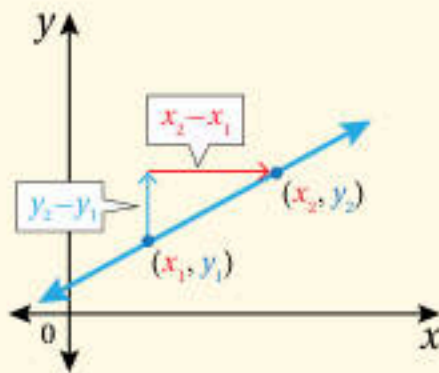
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

ولإيجاد ميل المستقيم غير الرأسي في المستوى الإحداثي يمكننا إيجاد نسبة التغير في الإحداثي y (التغير الرأسي) إلى التغير في الإحداثي x (التغير الأفقي) بين أي نقطتين على المستقيم.

ميل المستقيم

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.



• **بالرموز:** يمكن إيجاد الميل (m) للمستقيم غير الرأسي المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحو الآتي:

$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

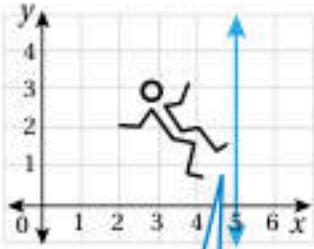
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التغير في y ← $y_2 - y_1$
التغير في x ← $x_2 - x_1$

الوحدة 3

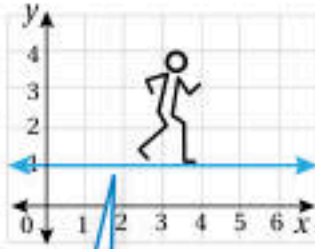
يمكن أن يكون ميل المستقيم سالباً أو موجباً أو صفراً أو غير مُعرّف كما يظهر في التمثيلات البيانية أدناه. للمقارنة بين ميل المستقيمات المختلفة أتخيل نفسي أسير على كل منحني من اليسار إلى اليمين:

الميل غير مُعرّف



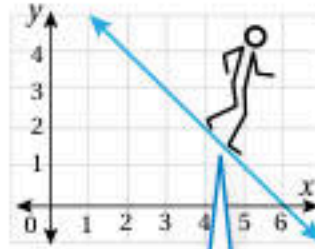
مستقيم عمودي

الميل صفر



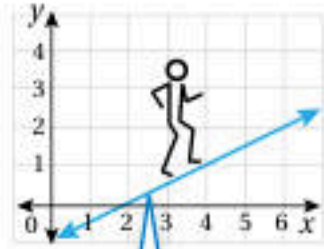
مستقيم أفقي

الميل سالب



ينحدر المستقيم إلى الأسفل عند التحرك من اليسار إلى اليمين

الميل موجب

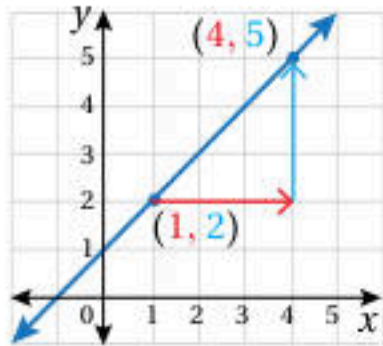


يرتفع المستقيم إلى الأعلى عند التحرك من اليسار إلى اليمين

مثال 1

أجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتي:

1 (1, 2), (4, 5)



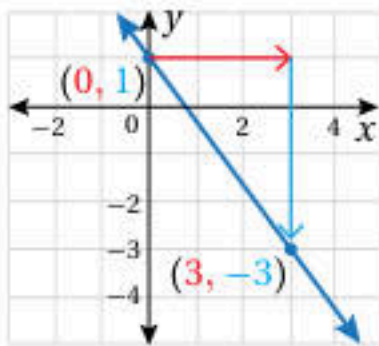
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5 - 2}{4 - 1} \\ &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 2)
وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5)
أبسط

إذن، ميل المستقيم هو 1

2 (0, 1), (3, -3)



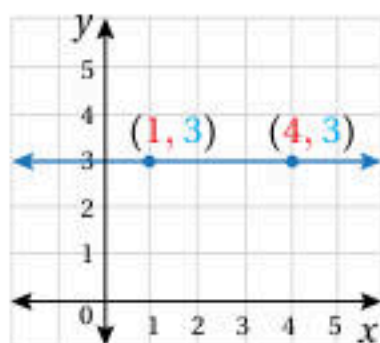
$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-3 - 1}{3 - 0} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (0, 1)
وعن (x_2, y_2) بـ (3, -3)
أبسط

إذن، ميل المستقيم هو $-\frac{4}{3}$

3 (1, 3), (4, 3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

صيغة الميل

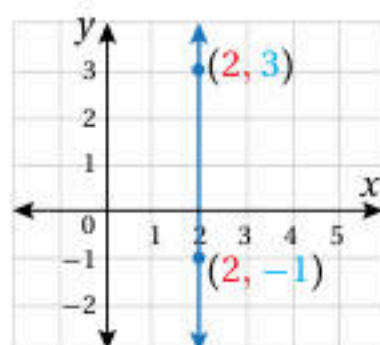
أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 3)

وعن (x_2, y_2) بـ (4, 3)

أبسط

إذن، ميل المستقيم هو 0

4 (2, 3), (2, -1)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-1 - 3}{2 - 2}$$

$$= \frac{-4}{0}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (2, 3)

وعن (x_2, y_2) بـ (2, -1)

أبسط

إذن، ميل هذا المستقيم غير مُعرّف.

أتحقق من فهمي:



5 (-1, 2), (3, 5)

6 (-1, -2), (-4, 1)

7 (1, 2), (-3, 2)

8 (1, 5), (1, -4)

إذا عَلِمَ ميلُ المستقيم وإحداثيّتا نقطةٍ عليه، فيمكنُ إيجادُ الإحداثيّ المجهولَ لأيِّ نقطةٍ أخرى على المستقيم.

1 أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(3, s)$ يساوي $\frac{3}{5}$

أفترض أن النقطة $(-2, 1)$ هي (x_1, y_1) ، والنقطة $(3, s)$ هي (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{3 - (-2)} \quad \text{أعوّض } x_1 = -2, x_2 = 3, y_1 = 1, y_2 = s$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{5} \quad \text{أبسّط}$$

$$5(s - 1) = 3 \times 5 \quad \text{خاصية ضرب التبادلي}$$

$$5s - 5 = 15 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$5s = 20 \quad \text{أجمع 5 لكلا الطرفين}$$

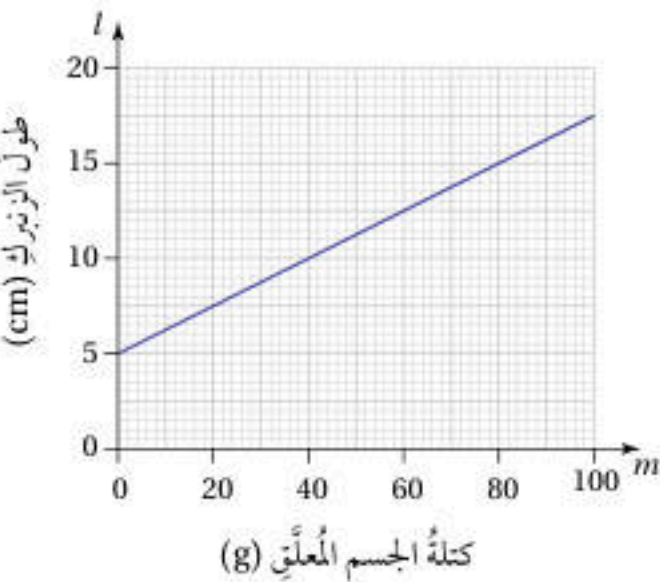
$$s = 4 \quad \text{أقسم طرفي المعادلة على 5}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

2 أجد قيمة k التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(3, 1)$ و $(k, 2)$ يساوي $-\frac{1}{6}$

معدل التغير (rate of change) هو نسبة تصف مقدار تغير كمية بالنسبة إلى تغير كمية أخرى، ويمكننا استعمال ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين هاتين الكميتين لتفسير معنى معدل التغير في المسائل الحياتية.

مثال 3: من الحياة



يبين التمثيل البياني المجاور طول زنبرك l بالسنتيمترات، عند تعليق جسم كتلته m غرام به.

1 أجد طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به.

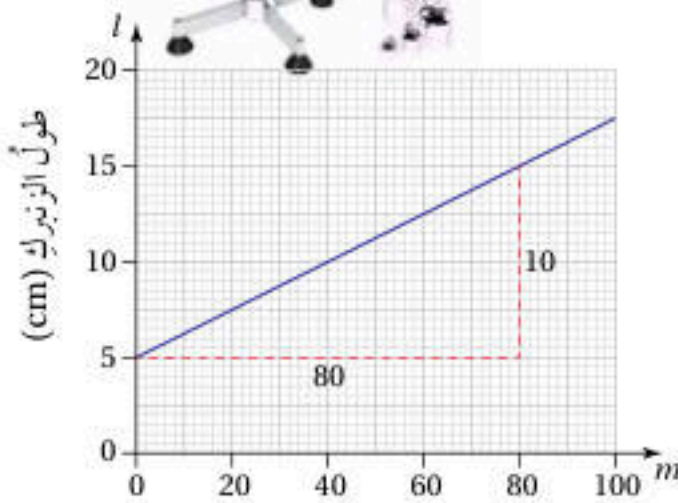
طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به 5 cm ، وهي القيمة التي تقابل الكتلة 0 g في التمثيل.

2

أجد معدل تغير طول الزنبرك بالنسبة إلى كتلته، ثم أبين ماذا يمثل.

لايجاد معدل التغير أجد ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين الكتلة وطول الزنبرك.

أستعمل النقطتين (0, 5) و (80, 15) لايجاد ميل المستقيم.



كتلة الجسم المعلق (g)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (0, 5)

$$= \frac{15 - 5}{80 - 0}$$

وعن (x_2, y_2) بـ (80, 15)

$$= \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

أبسط

إذن، ميل المستقيم هو $\frac{1}{8}$ ، وهو يمثل معدل التغير في طول الزنبرك لكل غرام من الكتلة، حيث إن طول الزنبرك يزداد بمقدار $\frac{1}{8}$ cm لكل غرام يُضاف إليه.



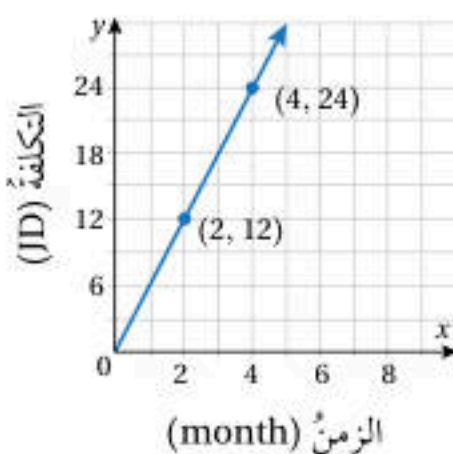
أتدقق من فهمي:

3

أجد تكلفة تشغيل الآلة لمدة 3 أشهر.

4

أجد معدل تغير تكلفة تشغيل الآلة بالنسبة إلى الزمن، ثم أوضح ماذا يمثل.



الزمن (month)

1 (3, 3), (5, 7)

2 (6, 1), (4, 3)

3 (-2, -6), (-2, 6)

4 (5, -7), (0, -7)

5 (-1, 0), (0, -5)

6 (4, 1), (12, 8)

أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي:

أتدرب وأحل المسائل

أتذكر

أراعي الترتيب عند تعويض إحداثيات الزوجين المرتبين في

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

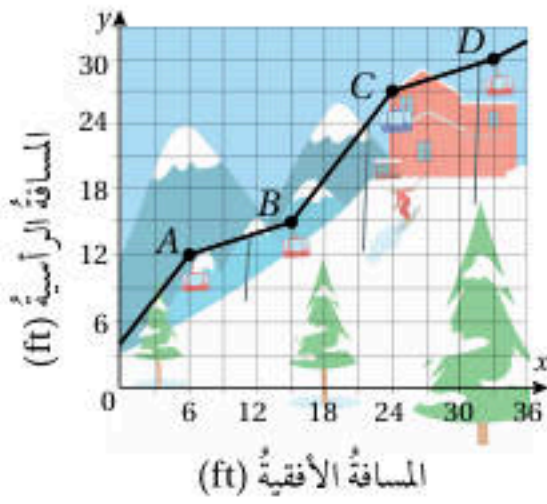
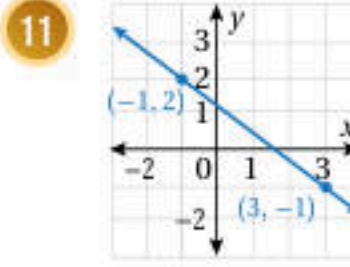
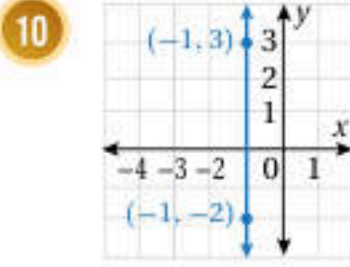
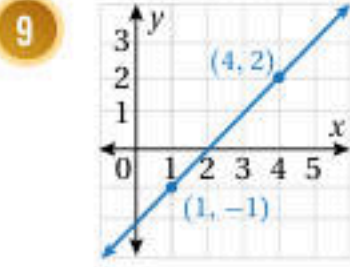
الوحدة 3

أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم (m) المار بكل نقطتين مما يأتي على نحو ما هو مُعطى:

7 $(6, -2), (s, -6), m = 4$

8 $(9, s), (6, 3), m = -\frac{1}{3}$

أحدّد ما إذا كان ميل كل مستقيم مما يأتي سالبًا أم موجبًا أم صفرًا أم غير معرف، ثمّ أجدّه:



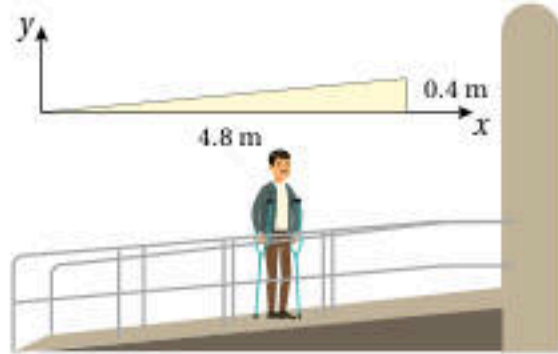
ترلّج: يبيّن التمثيل البياني المجاور المنظر الجانبي لمضعد ترلّج.

أجد ميل كل من: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$.

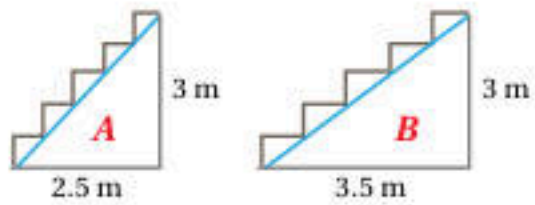
أي جزء من مضعد الترلّج يُعدّ الأشدّ انحدارًا؟ أبرّر إجابتي.

أتعلّم

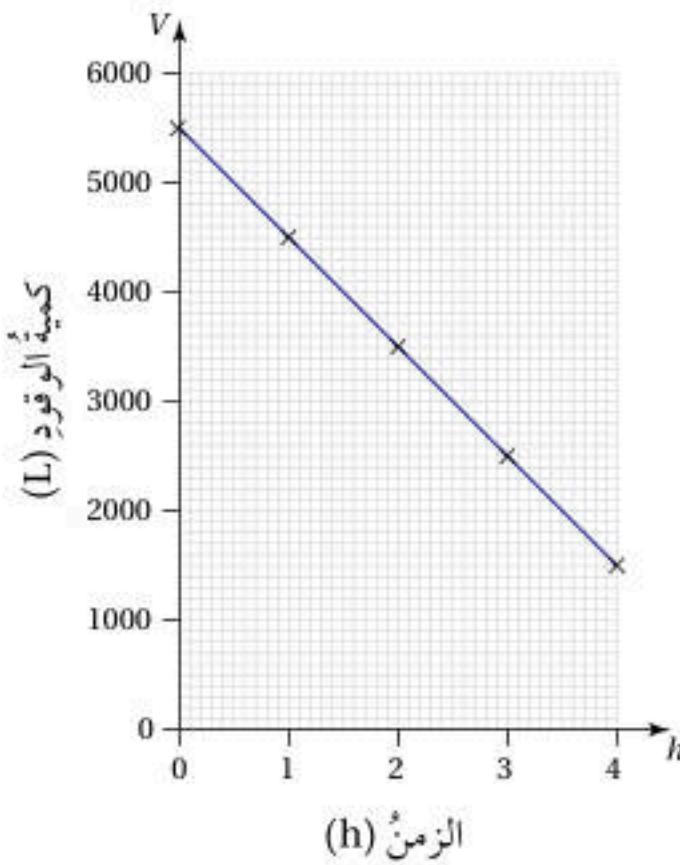
كلّما زادت القيمة المطلقة للميل، كان المستقيم أشدّ انحدارًا.



منحدرات: تنصّ قوانين البناء المتعلقة بمنحدرات وصول الأشخاص ذوي الإعاقة الحركية إلى الأبنية على أنّ كلّ ارتفاع رأسيّ بمقدار 0.4 m يتطلب مسارًا أفقيًا طوله 4.8 m. أجد ميل هذا المنحدر.



درج: يبيّن الشكل المجاور درجين مُصمّمين للدخول إلى أحد المباني. فأَيّ الدرجين اختار صعوده للدخول إلى المبنى؟ أبرّر إجابتي.



طائرة: يبين التمثيل البياني
المجاور كمية الوقود V بالترات
في خزان طائرة بعد h ساعة.

16 ما كمية الوقود في خزان الطائرة
عند انطلاقها؟

17 ما كمية الوقود في الخزان بعد
مرور 3.5 h؟

18 أجد معدل تغير كمية الوقود في
الخزان بالنسبة إلى الزمن، ثم
أبين ماذا يمثل.

مهارات التفكير العليا

19 **اكتشف الخطأ:** أوجد مهند ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0, 2)$, $(5, 4)$ ، وكان حله
على النحو الآتي:

$$m = \frac{2-4}{5-0} = -\frac{2}{5} \quad \text{X}$$

أبين الخطأ الذي وقع فيه مهند وأصححه.

إرشاد

أوظف الميل في تبرير
إجابتي.

20 **تبرير:** هل تقع النقاط $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 4)$ على المستقيم نفسه؟ أبرر
إجابتي.

21 **مسألة مفتوحة:** أجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله -9

22 **اكتب:** كيف أجد ميل مستقيم ماراً بنقطتين؟

أستكشف

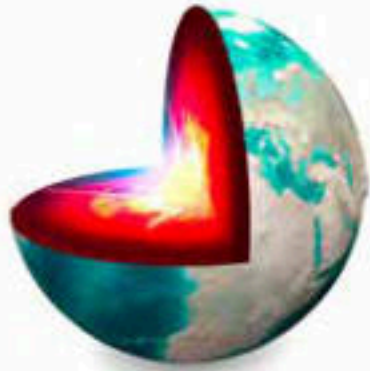
فكرة الدرس

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع، وأمثلها بيانياً.

المصطلحات

صيغة الميل والمقطع

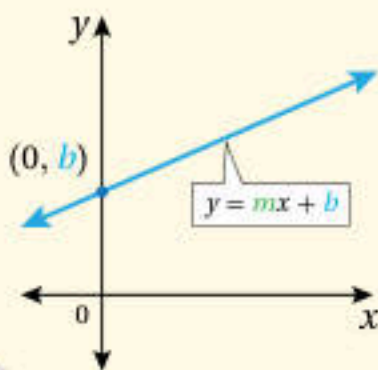
يبلغ متوسط درجة الحرارة على سطح الأرض 20°C تقريباً. وترتفع درجة الحرارة تحت سطح القشرة الأرضية بمعدل 25°C لكل كيلومتر من العمق. اكتب معادلة بمتغيرين تمثل درجة الحرارة لكل كيلومتر تحت سطح الأرض.



تعلمت سابقاً كيفية إيجاد الميل والمقطعين الإحداثيين للمستقيم. ويمكنني استعمال الميل والمقطع y لكتابة معادلة أي مستقيم بصيغة الميل والمقطع (slop-intercept form).

صيغة الميل والمقطع

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** صيغة الميل والمقطع للمعادلة الخطية هي: $y = mx + b$ ، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y له.

• **بالرموز:**

$$y = mx + b$$

الميل $\rightarrow$ mx $\rightarrow$ المقطع y

مثال 1

1 اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{4}{5}$ والمقطع y له -7 بصيغة الميل والمقطع.

أعوض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{4}{5}x + (-7)$$

$$y = \frac{4}{5}x - 7$$

صيغة الميل والمقطع

$$m = \frac{4}{5}, b = -7$$

أبسط

$$y = \frac{4}{5}x - 7$$

إذن، معادلة المستقيم

2 أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (1, 5) وميله 2 بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 استعمل الميل وإحداثي النقطة لإيجاد قيمة b .

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ 5 &= 2(1) + b && \text{أعوّض } m = 2, y = 5, x = 1 \\ 5 &= 2 + b && \text{أبسط} \\ 5 - 2 &= 2 + b - 2 && \text{أطرح 2 من كلا الطرفين} \\ 3 &= b && \text{أبسط} \end{aligned}$$

الخطوة 2 أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ y &= 2x + 3 && \text{أعوّض } m = 2, b = 3 \end{aligned}$$

إذن، معادلة المستقيم $y = 2x + 3$

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين (2, 1) و (5, -8) بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 استعمل النقطتين في إيجاد الميل.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\ &= \frac{-8 - 1}{5 - 2} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (2, 1) \\ &= \frac{-9}{3} = -3 && \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (5, -8) \\ &&& \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، الميل -3

الخطوة 2 استعمل الميل وإحداثي إحدى النقطتين لإيجاد قيمة b

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ 1 &= -3(2) + b && \text{أعوّض } m = -3, y = 1, x = 2 \\ 1 &= -6 + b && \text{أبسط} \\ 1 + 6 &= -6 + b + 6 && \text{أجمع 6 إلى الطرفين} \\ 7 &= b && \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، فالمقطع y هو 7

الخطوة 3 أعرض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$y = mx + b$$

صيغة الميل والمقطع

$$y = -3x + 7$$

$$m = -3, b = 7$$

إذن، معادلة المستقيم $y = -3x + 7$

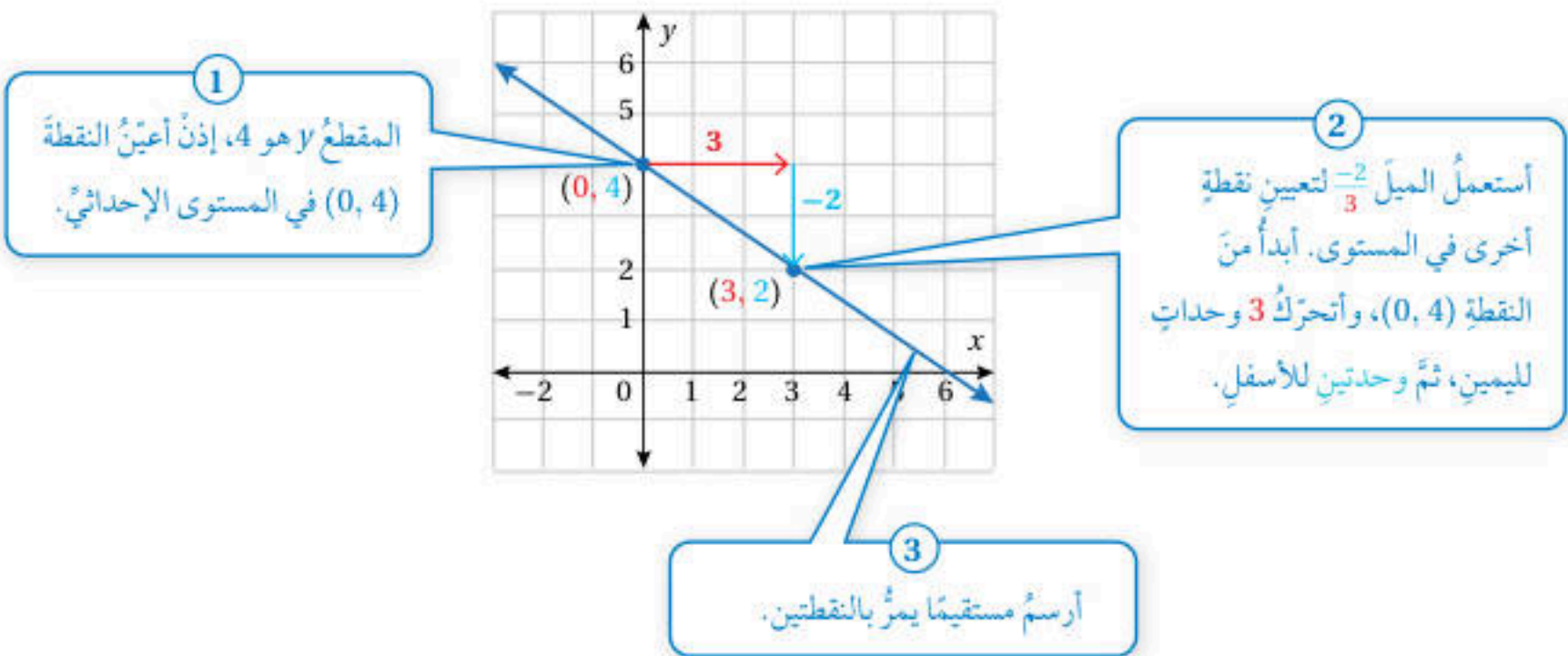
أتحقق من فهمي:

- 4 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 5 والمقطع y له -2 بصيغة الميل والمقطع.
- 5 أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-1, 0)$ وميله $\frac{1}{3}$ بصيغة الميل والمقطع.
- 6 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(0, -4)$ و $(-2, 6)$ بصيغة الميل والمقطع.

يمكن استعمال الميل والمقطع y من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل المستقيم.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $y = -\frac{2}{3}x + 4$ بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .



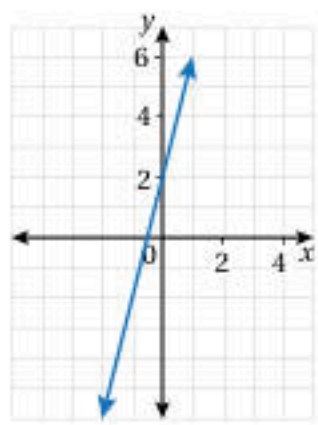
2 $y = 2x + 1$

3 $y = x - 4$

4 $y = 3 - x$

تعلّمتُ سابقًا كيفية تمثيل معادلة خطية مكتوبة بصيغة الميل والمقطع، وبالعكس يُمكنني كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع عرّف تمثيلها البياني.

مثال 3



1 أكتب معادلة المستقيم المُمثَّلة بيانيًا في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع:

الخطوة 2 أجد الميل.

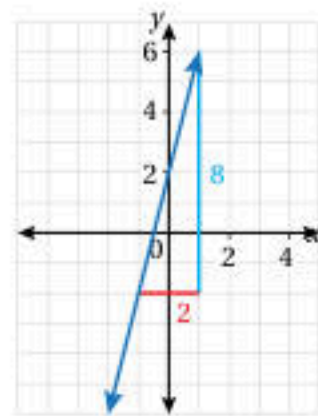
أختار نقطتين على المستقيم وأتكونا النقطتين $(1, 6)$ ، $(-1, -2)$ ، وأجد مقدار التغير الرأسي والتغير الأفقي بينهما.

عدد الخطوات الأفقية: 2

عدد الخطوات الرأسية: 8

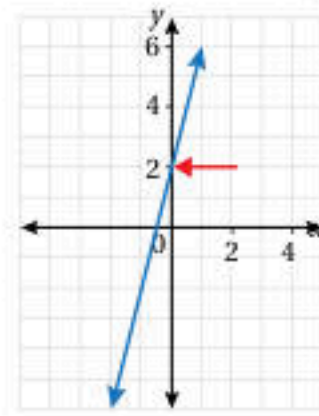
$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \text{الميل}$$

$$m = \frac{8}{2} = 4$$



الخطوة 1 أجد المقطع y .

ألاحظ أن المستقيم قطع المحور y عند 2، إذن، فالمقطع y هو 2



الخطوة 3 أكتب معادلة

أعوض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

صيغة الميل والمقطع

$$m = 4, b = 2 \text{ أعوض}$$

$$y = mx + b$$

$$y = 4x + 2$$

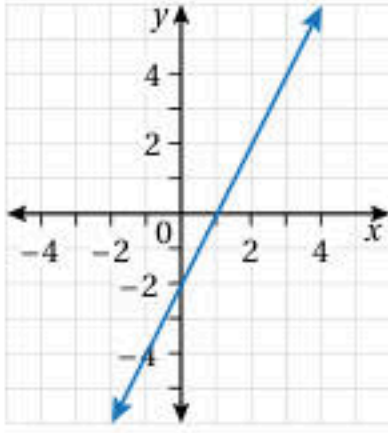
إذن، معادلة المستقيم $y = 4x + 2$

أتحقق من فهمي:

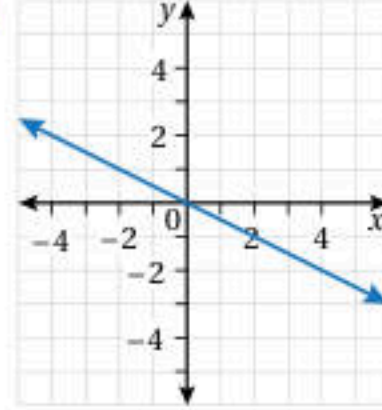


أكتب معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل شكل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع:

2



3



غالبًا ما يمثل المقطع y القيمة الابتدائية في المسائل الحياتية التي يتم نمذجتها بمعادلة خطية، ويمثل الميل معدل التغير الثابت.

مثال 4: من الحياة



أفكر

لماذا عُبر عن نسبة التناقص في طاقة البطارية بـ -0.2 في المعادلة؟

بطارية: إذا كانت النسبة المئوية لطاقة بطارية جهاز حاسوب محمول مشحونة شحناً تاماً (بالصيغة العشرية) 1.00 ، وبعد تشغيل الجهاز تبدأ طاقة البطارية بالتناقص بنسبة 0.2 كل ساعة.

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد نسبة الطاقة المتبقية في البطارية بعد مرور ساعات عدة على تشغيل جهاز الحاسوب. افترض أن x هي عدد ساعات تشغيل الحاسوب، و y هي نسبة الطاقة المتبقية في البطارية.

نسبة الطاقة المتبقية



y

نسبة التناقص في الطاقة



-0.2

عدد ساعات التشغيل



x

نسبة الطاقة عند بداية التشغيل



1

$$y = -0.2x + 1$$

2 أصف ما يمثله المقطع y والميل في المسألة.

المقطع y يساوي 1، وهو يمثل نسبة الطاقة بداية التشغيل بالصيغة العشرية، وتعني أن البطارية مشحونة بنسبة 100%، أما الميل فيمثل نسبة التناقص في طاقة البطارية كل ساعة (وهي نسبة ثابتة).

3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثله في المسألة.

لايجاد المقطع x ، أعوض $y = 0$ ، ثم أحل المعادلة لأجد قيمة x .

$$y = -0.2x + 1$$

المعادلة الأصلية

$$0 = -0.2x + 1$$

أعوض $y = 0$

$$0 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

أطرح 1 من كلا الطرفين

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-1}{-0.2}$$

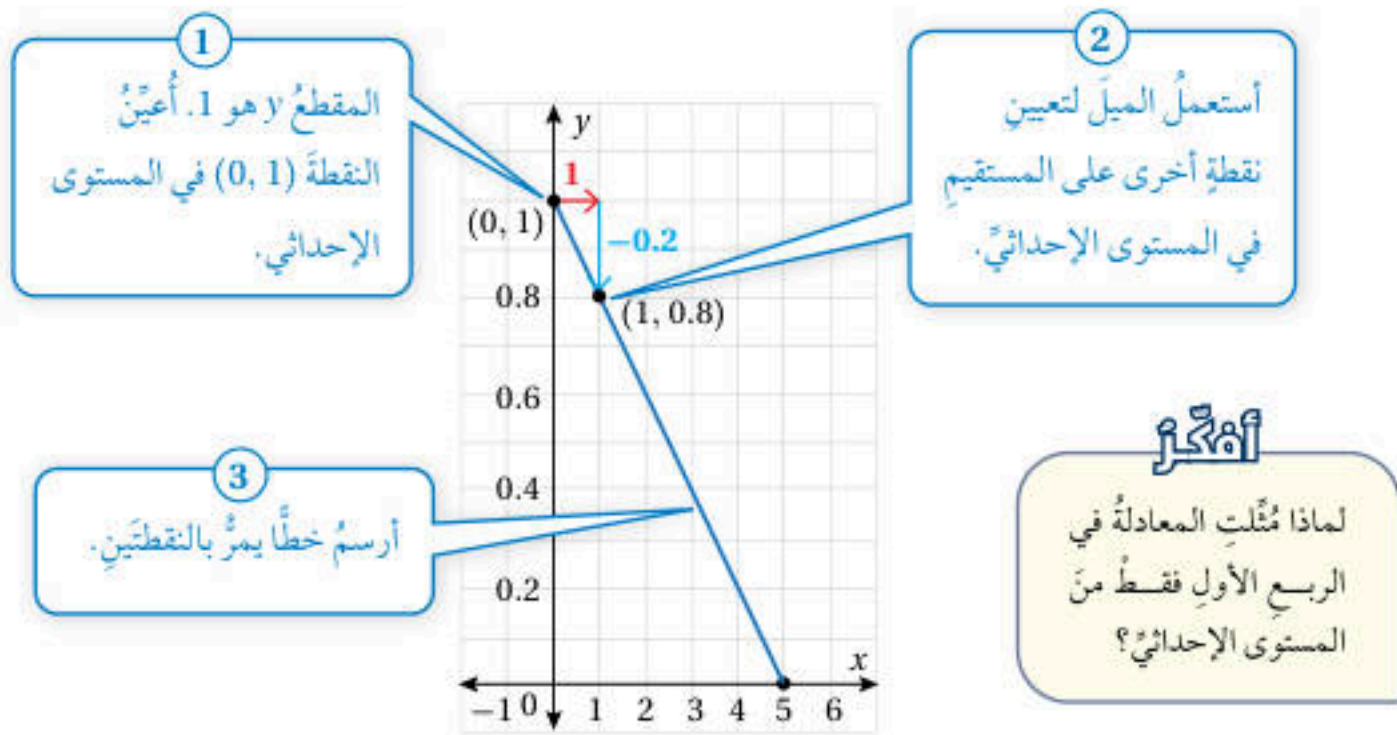
أقسم طرفي المعادلة على -0.2

$$x = 5$$

أبسط

إذن، فالمقطع x هو 5، وهو يدل على أن البطارية ستفقد شحنتها كلياً بعد 5 ساعات من تشغيل جهاز الحاسوب.

4 أمثل المعادلة بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .



5 بعد كم ساعة تكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75؟

المعادلة الأصلية

$$y = -0.2x + 1$$

أعوّض $y = 0.75$

$$0.75 = -0.2x + 1$$

أطرح 1 من كلا الطرفين

$$0.75 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

أقسم طرفي المعادلة على -0.2

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-0.25}{-0.2}$$

أبسط

$$x = 1.25$$

إذن، ستكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75 بعد ساعة وربع.

أتحقق من فهمي:



اشتراك هاتف: تدفع فرح اشتراكاً شهرياً لهاتفها قيمته 5 دنانير، وتدفع قرشين عن كلّ دقيقة تتحدث فيها بالهاتف.

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد تكلفة ما تدفعه فرح عند تحدّثها عددًا من الدقائق خلال الشهر.

2 أصف ما يمثله المقطع y والميل في المسألة.

3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثله في المسألة.

4 أمثل المعادلة بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .

أدرب وأحل المسائل



1 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 1 والمقطع y له -1 بصيغة الميل والمقطع.

2 أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل وميله 4 بصيغة الميل والمقطع.

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, 4)$ و $(3, -1)$ بصيغة الميل والمقطع.

4 أكتب معادلة المستقيم الأفقي الذي يقطع المحور y في النقطة $(0, -5)$ بصيغة الميل والمقطع.

أفكر

هل يمكن كتابة معادلة المستقيم الرأسي بصيغة الميل والمقطع؟

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال الميل والمقطع y :

5 $y = 3x + 4$

6 $y = 2x - 5$

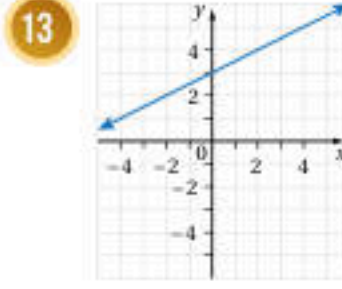
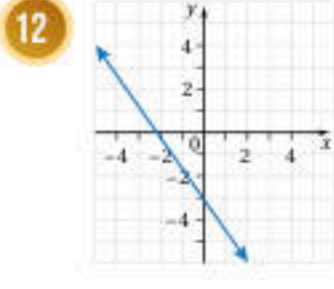
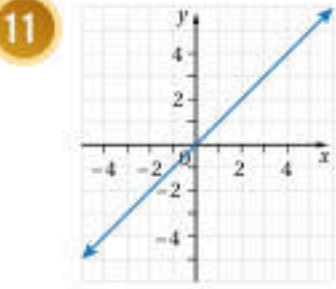
7 $y = \frac{x}{2} - 3$

8 $y = 3x + 5$

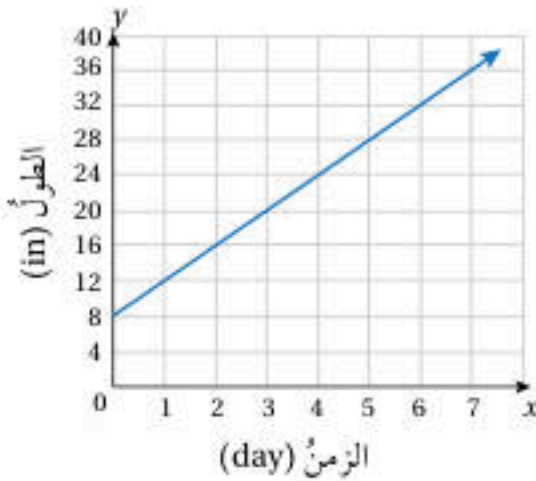
9 $y = \frac{x}{3} + 4$

10 $y = 4 - x$

أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع:



أشجار: يبين التمثيل البياني أدناه العلاقة بين طول نبتة موز بالإنش والزمن بالأيام منذ زراعتها.



14 كم كان طول الشجرة عند زراعتها؟

15 أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل مقدار نمو شجرة الموز بعد مرور أيام عدّة.

معلومة

شجرة الموز هي في الحقيقة ليست شجرة، بل هي عشبة عملاقة تقف مثل الأشجار وتُشابه النخيل الاستوائي، وتُعد أطول عشبة على وجه الأرض.





بيئة: تتناقص انبعاثات أول أكسيد الكربون في جميع أنحاء العالم بنحو 2.6 مليون طن متري كل عام. ففي عام 1991 بلغت انبعاثات أول أكسيد الكربون 79 مليون طن متري. أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل العلاقة بين انبعاثات أول أكسيد الكربون والزمن. (إرشاد: افترض أن $x = 91$ تدل على العام 1991).

16

معلومة

أحد مصادر الحرارة الجوفية للكرة الأرضية هو تقلص الكرة الأرضية تحت فعل الجاذبية عند نشأتها من الغبار الكوني.

علوم الأرض: أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

17

مهارات التفكير العليا

أكتشف المختلف: أي المعادلات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

18

$$2x + 3y = 12$$

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

$$6y = -4x + 24$$

$$3x - 2y = 12$$

$$x = 6 - 1.5y$$

تحذ: أجد قيمة a في المعادلة $2y + ax = -5$ ، علماً أن ميل المعادلة $\frac{5}{2}$.

19

أكتب: كيف أكتب معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع علم ميله والمقطع y له.

20



أستكشف

- تمثل المعادلة $y - 60.81 = 5.74(x - 5)$ ، العلاقة بين طول الأُنثى y سنتيمتر، وطول ساعدها x سنتيمتر.
- أجد ميل المستقيم الذي يمثل المعادلة.
 - اكتشف علماء الآثار هيكلًا عظميًا غير كاملٍ لأنثى بساعدٍ طوله 23 cm. أجد طول الهيكل العظمي.

فكرة الدرس

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة وأمثلها بيانيًا.

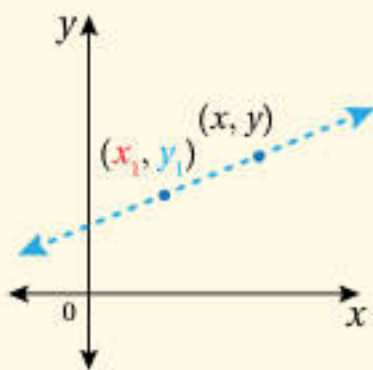
المصطلحات

صيغة الميل ونقطة.

تعلمت في الدرس السابق كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع y ، وسأتعلم في هذا الدرس كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة (point - slope form) إذا علمت ميل المستقيم وإحداثيات نقطة يمرُّ بها.

صيغة الميل ونقطة

مفهوم أساسي



- بالكلمات: صيغة الميل ونقطة للمعادلة الخطية هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث m ميل المستقيم، و (x_1, y_1) نقطة مُعطاة.

- بالرموز:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الميل

نقطة مُعطاة

مثال 1

- أكتب معادلة المستقيم المارَّ بالنقطة $(-3, 6)$ وميله -5 بصيغة الميل ونقطة. أعوض الميل والنقطة المُعطاة في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = -5(x - (-3))$$

$$y - 6 = -5(x + 3)$$

صيغة الميل ونقطة

$$m = -5, (x_1, y_1) = (-3, 6)$$

أبسط

إذن، معادلة المستقيم $y - 6 = -5(x + 3)$

الوحدة 3

2 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغة الميل ونقطة.

الخطوة 1 استعمل النقطتين في إيجاد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)} \quad \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (-3, 5) \text{ وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (9, 21)$$

$$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{أبسط}$$

إذن، الميل $\frac{4}{3}$

الخطوة 2 أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$$

$$m = \frac{4}{3}, (x_1, y_1) = (9, 21)$$

$$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9) \quad \text{إذن، معادلة المستقيم}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(8, -4)$ وميله $\frac{2}{3}$ بصيغة الميل ونقطة.

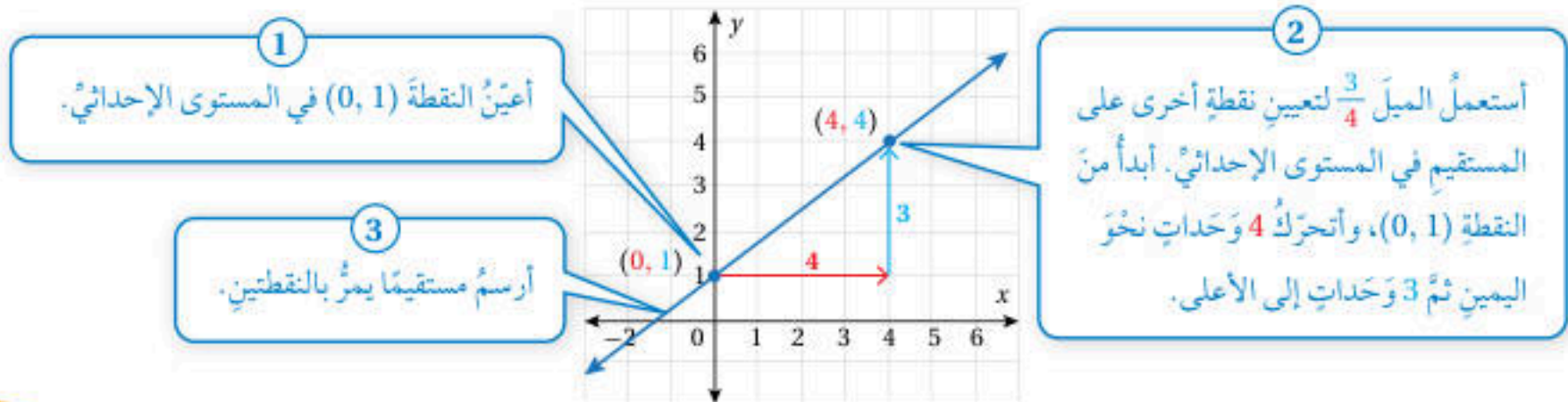
4 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(7, 2)$ و $(1, -8)$ بصيغة الميل ونقطة.

يمكن استعمال الميل والنقطة المُعطاة من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل ونقطة لتمثيل المستقيم.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $y - 1 = \frac{3}{4}x$ بيانياً باستعمال الميل ونقطة.

يمكن إعادة كتابة المعادلة على الصورة: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0)$ ، وعليه فإن الميل $\frac{3}{4}$ والنقطة $(0, 1)$.



✓ اتحقق من فهمي:

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال الميل ونقطة:

2 $y - 4 = 2(x - 3)$

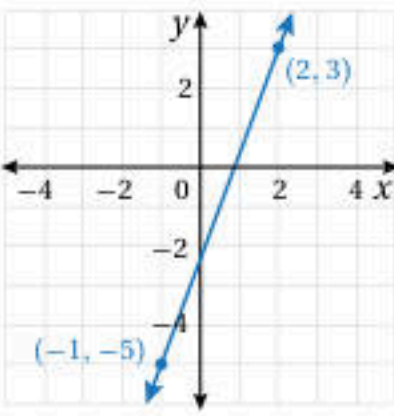
3 $y - 5 = -3(x + 1)$

4 $y + 7 = -\frac{4}{5}(x - 4)$

تعلمت في المثال السابق كيفية التمثيل البياني لمعادلة خطية مكتوبة بصورة الميل ونقطة، وبالعكس يمكن كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة إذا عُرف تمثيلها البياني.

مثال 3

1 أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل ونقطة:



الخطوة 1 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم وأجد الميل.

صيغة الميل

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

أعوّض عن $(x_1, y_1) = (-1, -5)$ وعن $(x_2, y_2) = (2, 3)$

أبسط

الخطوة 2 أعوّض في صيغة الميل ونقطة.

أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

صيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$$

$$m = \frac{8}{3}, (x_1, y_1) = (2, 3)$$

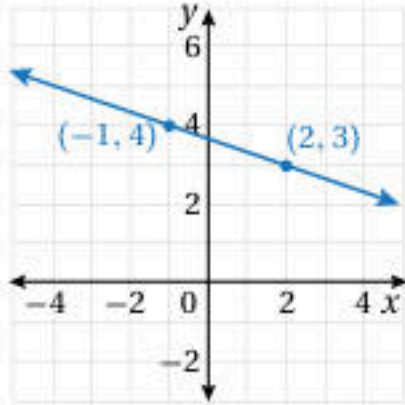
إذن، معادلة المستقيم $y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$

الوحدة 3

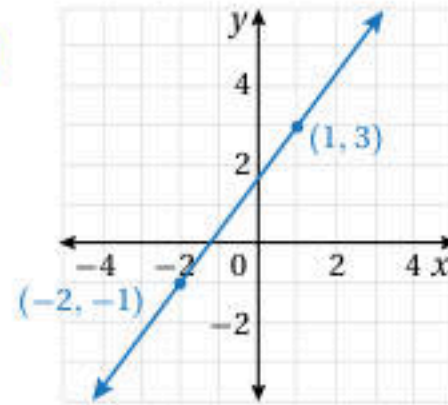
أتحقق من فهمي:

أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كلٍّ مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

2



3



يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة بيانات مُمثّلة في جدول، إذا كان معدل التغير نفسه بين الأزواج المرتبة المتتالية فيه، ويكون معدل التغير في هذه الحالة هو الميل.

مثال 4: من الحياة

ضغط الماء: يبيّن الجدول المجاور العلاقة بين ضغط الماء والعمق.

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	6

1 أبين أن العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية.

أجد معدل التغير بين الأزواج المرتبة المتتالية في الجدول.

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	6

أعلم

يُقاس ضغط الماء بوحدة
الأتوموسفير (atm)

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{3}{30} = 0.1, \quad \frac{1}{10} = 0.1$$

إذن، العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية، ومعدل التغير هو 0.1 atm لكل متر.

- 2 أكتب معادلة خطية بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة يمكن استعمالها لإيجاد ضغط الماء عند أي عمق.
بما أن معدل التغير يمثل الميل، إذن أعوض الميل وإحداثيات أي نقطة في الجدول في صيغة الميل والنقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 5 = 0.1(x - 40) \quad \text{أعوض } m = 0.1, (x_1, y_1) = (40, 5)$$

$$\text{إذن، معادلة المستقيم } y - 5 = 0.1(x - 40)$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

- 3 **منطاد:** يبين الجدول المجاور العلاقة بين ارتفاع منطاد هواء ساخن والزمن.
أبين أن العلاقة بين ارتفاع المنطاد والزمن خطية.

- 4 أكتب معادلة خطية بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة يمكن استعمالها لإيجاد ارتفاع المنطاد عند أي لحظة.



الارتفاع (m)	الزمن (s)
640	10
590	30
490	70
440	90

أدرب
وأحل المسائل

- أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمعلوم ميله m في كلٍّ مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

1 $(4, -3), m = \frac{3}{4}$

2 $(-2, -7), m = -5$

- أكتب معادلة المستقيم المارّ بكلّ نقطتين مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

3 $(3, 7), (-3, 5)$

4 $(-1, 8), (9, -6)$

5 $(-1, 6), (-3, 10)$

- أمثل كل معادلة مما يأتي بيانيًا باستعمال الميل ونقطة:

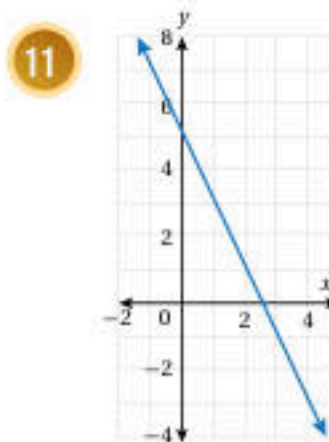
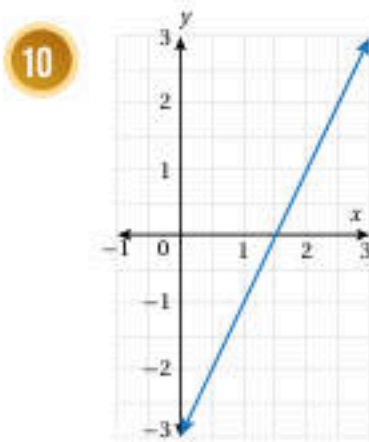
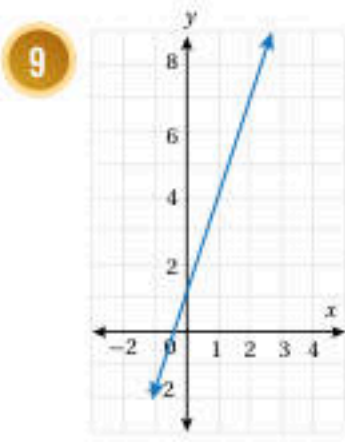
6 $y + 3 = 2(x - 1)$

7 $y - 1 = -3(x + 2)$

8 $y - 2 = \frac{4}{9}(x - 3)$

الوحدة 3

أكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل مما يأتي:



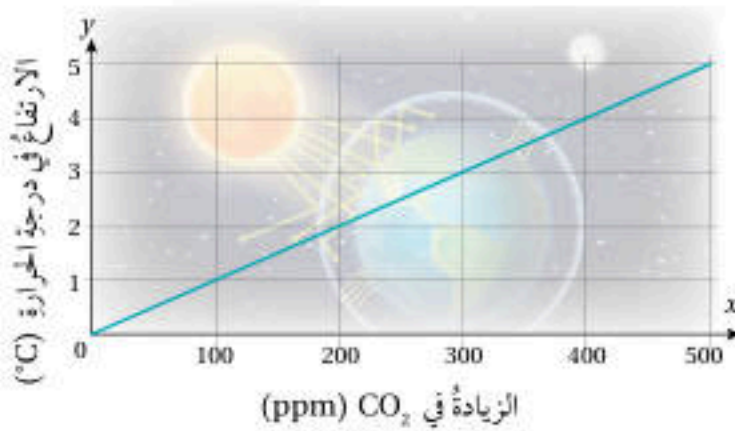
جَبْر: إذا كان ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-1, p)$, $(3p, -5)$ يساوي $-\frac{4}{5}$ ، فأجد قيمة الثابت p .



بعوض: تمثل المعادلة $N - 50 = 2(t - 10)$ عدد البعوض N (بالآلاف) في مستنقع صغير بعد t يوماً من بداية شهر حزيران.

أمثل المعادلة بيانياً، حيث $t \geq 0$.

بعد كم يوم من بداية الشهر يكون عدد البعوض في المستنقع 46000؟



بيئة: التمثيل البياني المجاور للتنبؤ بالعلاقة بين زيادة ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجوي بالأجزاء من مليون (ppm) وارتفاع متوسط

درجة الحرارة في العالم بالسيلسيوس.

إذا زاد CO_2 بمقدار 300 ppm، فما الارتفاع المتوقع في درجة الحرارة؟

ارتفعت درجة الحرارة بين عامي 1980 م و 2000 بمقدار 0.4°C أجد مقدار الزيادة في كمية ثاني أكسيد الكربون.

أكتب معادلة خطية بمتغيرين يمكن استعمالها لإيجاد مقدار الارتفاع في درجة الحرارة عند أي ارتفاع في كمية CO_2 في الغلاف الجوي.

معلومة

يُعد ثاني أكسيد الكربون أحد الغازات التي تحبس الحرارة الناتجة من الإشعاع الشمسي، مما يؤثر في المناخ.



الزمن (بالسنوات)	محيط جذع الشجرة (cm)
1	2
2	4
3	6
4	8

أشجار: يبين الجدول المجاور العلاقة بين محيط جذع شجرة والزمن.

أبين أن العلاقة بين محيط جذع الشجرة والزمن خطية.

اكتب معادلة خطية بمتغيرين يمكن استعمالها لإيجاد محيط جذع الشجرة في أي سنة.

أنتبأ بمحيط جذع الشجرة بعد 10 سنوات.

معلومة

بعض الأشجار التي قُطِعَ جذعها لديها القدرة على جذب النيتروجين من الجو وتسميد المنطقة المحيطة بها.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أوجد كل من باسم ولين معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, -6)$, $(1, 6)$ على النحو الآتي:

لين

$$y + 6 = 4(x + 2)$$

باسم

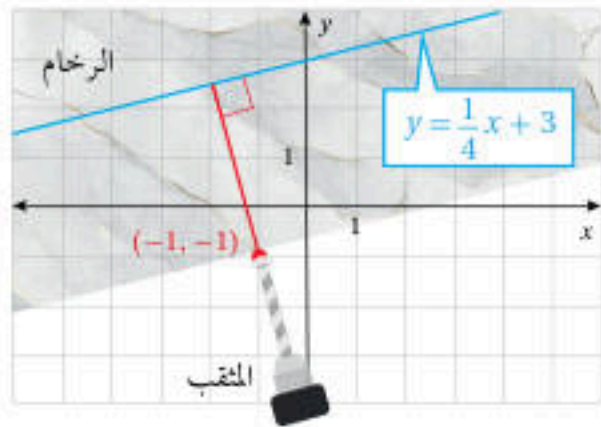
$$y - 6 = 4(x - 1)$$

هل إجابة كل منهما صحيحة؟ أبرر إجابتي.

تبرير: كيف سيتغير التمثيل البياني للمعادلة $y - 12 = 8(x - 2)$ ، إذا تغيرت إشارات الطرح في المعادلة إلى إشاراتي جمع؟ أبرر إجابتي دون اللجوء إلى تمثيل المعادلة بيانياً.

تبرير: أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(5, 5)$, $(9, 1)$ بصيغة الميل والمقطع، ثم أبين أن المقطع x يساوي 10، وأبرر إجابتي.

اكتب: كيف أكتب معادلة مستقيم إذا علم ميله ونقطة يمر بها؟



أستكشف

يُوصَلُ رأسُ مِثْقَبٍ رُخَامٍ بالحاسوب؛
لتحديد إحداثيات نقطة الثقب والعمق
الذي يجب أن يبلغه المِثْقَبُ.

أفترض أن رأس المِثْقَبِ عند النقطة

$(-1, -1)$ ، أكتب معادلة المستقيم المارّ برأس المِثْقَبِ والعموديّ على

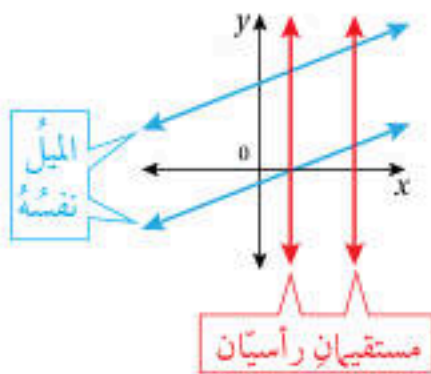
مستقيم يقع على سطح الرخام ومعادلته هي: $y = \frac{1}{4}x + 3$.

فكرة الدرس

- أكتب معادلة المستقيم المارّ بنقطة مُعطاة وبوازي مستقيماً معلوماً.
- أكتب معادلة المستقيم المارّ بنقطة مُعطاة ويعامد مستقيماً معلوماً.

المصطلحات

مستقيمان متوازيان، مستقيمان متعامدان، معكوس المقلوب.



يُسمى المستقيمان الواقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر **مستقيمين متوازيين** (parallel lines)، ويكون لهما الميل نفسه. والمستقيمان الرأسية جميعها متوازية.

مثال 1

1 أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-2, 5)$ والموازي للمستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$.

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$ هو $\frac{3}{2}$

الخطوة 2 أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع باستعمال الميل والنقطة المُعطاة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$$

أعوّض $m = \frac{3}{2}$ ، $(x_1, y_1) = (-2, 5)$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$$

أبسط

$$y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$$

خاصية التوزيع

$$y - 5 + 5 = \frac{3}{2}x + 3 + 5$$

أجمع 5 إلى الطرفين

$$y = \frac{3}{2}x + 8$$

أبسط

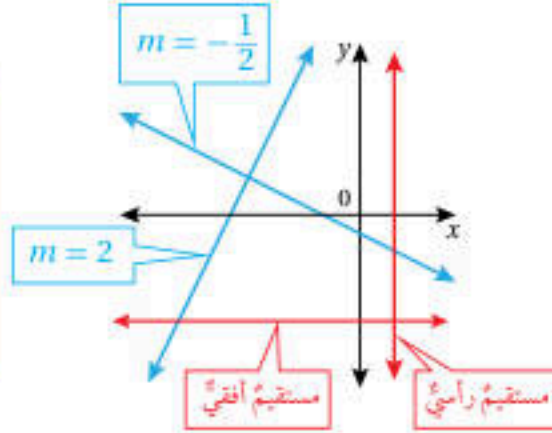
أتحقق من فهمي:

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(3, -1)$ والموازي للمستقيم $y = 2x + 5$.

أعلم

$$\frac{3}{4} \text{ معكوس مقلوب } -\frac{4}{3} \text{ لأن:}$$

$$\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$$



يُسمّى المستقيمان اللذان يتقاطعان مُكوّنين زوايا قوائم **مستقيمين متعامدين** (perpendicular lines). ويكون ميل أحدهما **معكوس مقلوب** (opposite reciprocals) ميل الآخر، وهذا يعني أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمتان الرأسية والأفقية متعامدة.

مثال 2

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(4, 0)$ والعمودي على المستقيم $4y = -8x + 1$.

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

لإيجاد ميل المستقيم المُعطى أحتاج إلى كتابة المعادلة بصورة الميل والمقطع.

$$4y = -8x + 1$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$$

$$y = -2x + \frac{1}{4}$$

معادلة المستقيم المُعطى

أقسم طرفي المعادلة على 4

أبسط

ميل المستقيم $y = -2x + \frac{1}{4}$ هو -2 .

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى يساوي معكوس مقلوب العدد -2 ؛ أي $\frac{1}{2}$.

الخطوة 3 أكتب معادلة المستقيم العمودي بصيغة الميل والمقطع.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

$$m = \frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (4, 0)$$

أبسط

خاصية التوزيع

أتحقق من فهمي:

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (1, 8) والمُعامِد للمستقيم $3y - 9x = 12$.

يمكن تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك من خلال الميل.

مثال 3

1 أحدد ما إذا كان المستقيمان $-3x + 4y = 32$ و $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

الخطوة 1 أجد ميل كل مستقيم.

• ميل المستقيم $-3x + 4y = 32$

معادلة المستقيم المُعطى

أجمع $3x$ إلى كلا الطرفين

أقسم طرفي المعادلة على 4

أبسط

$$-3x + 4y = 32$$

$$-3x + 4y + 3x = 32 + 3x$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{32}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + 8$$

إذن، ميل المستقيم $-3x + 4y = 32$ يساوي $\frac{3}{4}$

• ميل المستقيم $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ يساوي $\frac{3}{4}$

الخطوة 2 أحدد العلاقة بين المستقيمين.

بما أن ميلَي المستقيمين متساويان، إذن، فالمستقيمان متوازيان.

2 أحدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(1, 1)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 2)$, $D(6, 1)$

الخطوة 1 أجد ميل كل مستقيم.

• ميل $\overleftrightarrow{AB}$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (-1, -5)

أبسط

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3$$

• مِيل $\overrightarrow{CD}$

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1 - 2}{6 - 3}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(3, 2)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(6, 1)$

أبسط

الخطوة 2 أحدّد العلاقة بين المستقيمين.

الميلان غير متساويين، إذن، فالمستقيمان غير متوازيين. ولتحديد ما إذا كان المستقيمان متعامدين أجد حاصل ضرب مَيْلَيْهِمَا.

$$3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

بما أن حاصل ضرب مَيْلَيْ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ يساوي -1 ، إذن، فالمستقيمان متعامدان.

✓ أتتحقق من فهمي:

3 أحدّد ما إذا كان المستقيمان $2x + y = 7$ و $y - 2x = 3$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

4 أحدّد ما إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(3, 6)$, $B(-9, 2)$, $C(5, 4)$, $D(2, 3)$

يمكن كتابة معادلة أي مستقيم يمرّ بنقطة معلومة يوازي أو يعامد مستقيماً معلوماً في كثير من التطبيقات الحياتية.

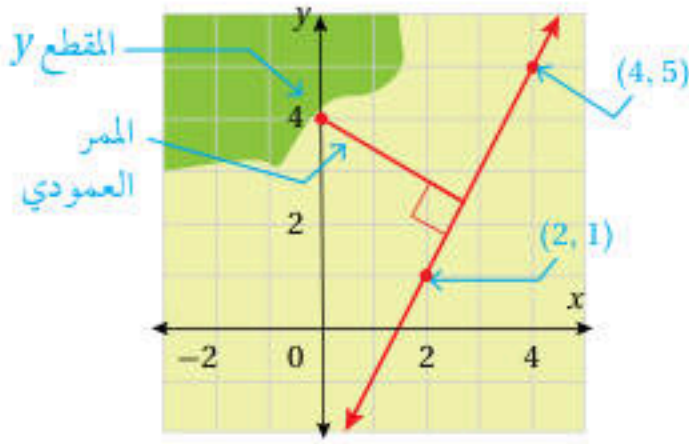
مثال 4: من الحياة



عمارة: ترغب إحدى البلديات بربط مدخل الحديقة العامة بمسار الجري داخل الحديقة من خلال ممر عمودي على المسار. معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل مخطط الحديقة، أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.



الوحدة 3



الخطوة 1 أجد ميل المستقيم الذي يمثل مسار الجري. تقع النقطتان (2, 1) و (4, 5) على مسار الجري، إذن، يمكن من خلالهما إيجاد ميل المستقيم الذي يمثل المسار.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (2, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5) أبسط

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم الذي يمثل معادلة الممر.

بما أن الممر عمودي على مسار الجري، إذن، أجد مقلوب معكوس ميل مسار الجري. بما أن ميل مسار الجري يساوي 2، فإن مقلوب معكوسه $-\frac{1}{2}$

الخطوة 3 أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.

بما أن المستقيم الذي يمثل الممر يقطع المحور y في النقطة (0, 4)، إذن، فإن المقطع y له يساوي 4، وعليه فإن معادلة الممر بصيغة الميل والمقطع هي:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

أتحقق من فهمي:

في المثال السابق، تخطط البلدية لإنشاء مسار ركض آخر داخل الحديقة مواز لمسار الركض الأول ويمر في مدخل الحديقة. أجد معادلة المستقيم الذي يمثل مسار الركض الجديد.

أدرب
وأحل المسائل

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة المُعطاة والموازي للمستقيم المُعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي:

1 $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$

2 $(2, -7), 2y = 5x - 3$

3 $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$

4 $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$

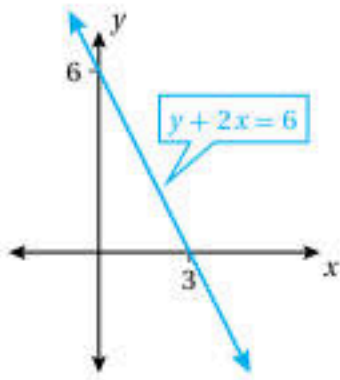
أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمُعامِد للمستقيم المُعطاة معادلته في كلِّ ممّا يأتي:

5 $(2, -7), y = x - 2$

6 $(-5, -4), y = \frac{1}{2}x + 1$

7 $(2, 2), 3y = -2x + 6$

8 $(-3, 0), 3x - 4y = -4$



بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمستقيم الذي معادلته $y + 2x = 6$

أبين أن النقطة $(1, 4)$ تقع على المستقيم.

أجد ميل المستقيم.

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة.

أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل والموازي للمستقيم المُعطى بصيغة الميل والمقطع.

يحتوي الصندوق المجاور على زوجين من المستقيمتين المتعامدتين. فأبني المستقيمتين مختلفتين؟ أبرّر إجابتي.

أحدّد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلِّ ممّا يأتي:

14 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

15 $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$

16 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), D(-6, -5)$

17 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

$$3x + 5y = 7$$

$$6x + 3y = 7$$

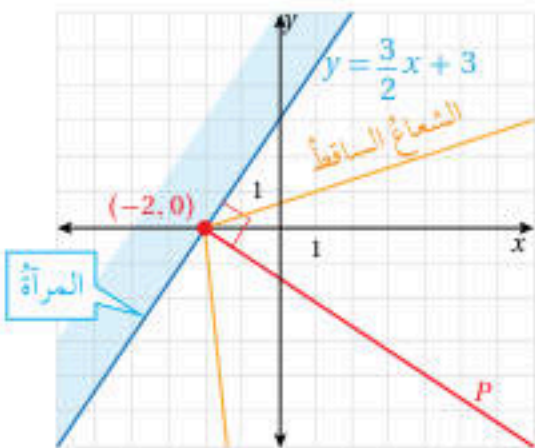
$$3y - 5x = 7$$

$$8x - 4y = 7$$

$$4y + 2x = 7$$

أتذكّر

زاوية سقوط الشعاع تساوي زاوية انعكاسه.



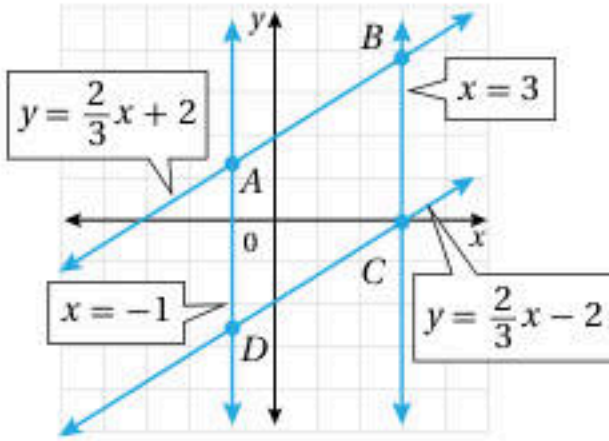
أشعة: تمثّل المعادلة $y = \frac{3}{2}x + 3$ مستقيماً يقع على سطح مرآة، وتمثّل النقطة $(-2, 0)$ نقطة التقاء الشعاع الساقط مع هذا المستقيم، أجد معادلة العمود P المُنقَم على المرآة.

أتذكر

متوازي الأضلاع شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

19

أستعمل الميل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المبين في التمثيل البياني المجاور يمثل متوازي أضلاع.



مهارات التفكير العليا

تبرير: تمثل النقاط $A(5, 10)$, $B(1, 5)$, $C(6, 1)$ ثلاثة رؤوس لمتوازي الأضلاع $ABCD$.

أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين A و C .

20

أجد إحداثييّ نقطتين مُحتملتين للرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع، وأبرّر إجابتي.

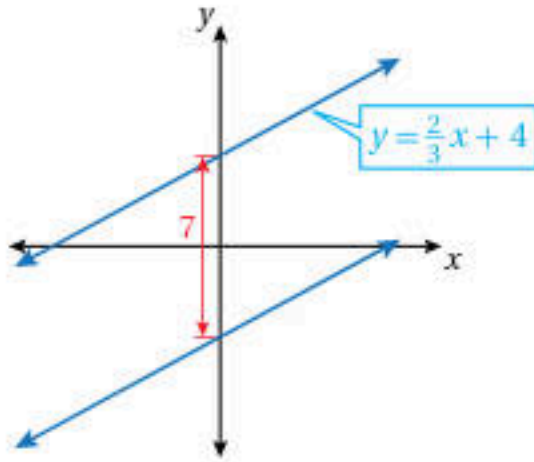
21

إرشاد

ترتيب قراءة الرؤوس غير مهم.

22

تبرير: يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم السفلي، وأبرّر إجابتي.



تحذّر: أجد قيمة a التي تجعل المستقيمين $y = ax + 5$ و $2y = (a+4)x - 1$ متوازيين.

23

أكتب: كيف يمكن تحديد ما إذا كان مستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك؟

24

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(5, -4)$ و $(5, -10)$:

(a) موجب (b) سالب

(c) صفر (d) غير مُعرّف

2 ميل المستقيم المارّ بالنقطة $(0, 0)$ هو 2، فأَيُّ النقاط

الآتية تقع أيضًا على المستقيم؟

(a) $(-4, 2)$ (b) $(2, 4)$

(c) $(-2, 4)$ (d) $(2, -4)$

3 المقطع y للتمثيل البياني للمعادلة $5x + 2y = 30$ هو:

(a) -15 (b) -6

(c) 6 (d) 15

4 المقطع x للتمثيل البياني للمعادلة $y = 4x + 32$ هو:

(a) -32 (b) -8 (c) 8 (d) 32

5 أيُّ المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا ميله $\frac{1}{3}$ ويمرّ بالنقطة $(-2, 1)$ ؟

(a) $y = \frac{1}{3}x + 1$ (b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ (d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أيُّ المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا له أكبر ميل؟

(a) $y = 3x$ (b) $y = x + 12$

(c) $y = 5x - 1$ (d) $y = 8x + 4$

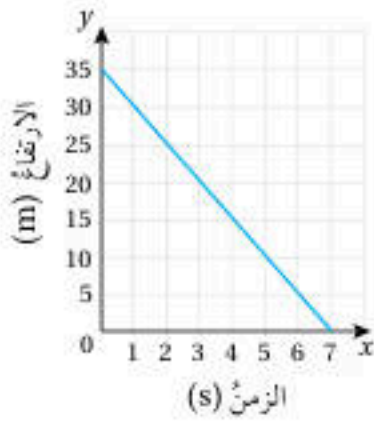
أبين أيُّ العبارات الآتية صحيحة دائمًا وأيُّها خطأ:

7 جميع المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه.

8 إذا كان ميل المستقيم 1، فإنه يمرّ بنقطة الأصل.

9 معدل التغير يكون إما سالبًا وإما موجبًا.

10 إذا كان لنقطتين الإحداثي x نفسه فهما تقعان على المستقيم الرأسي نفسه.

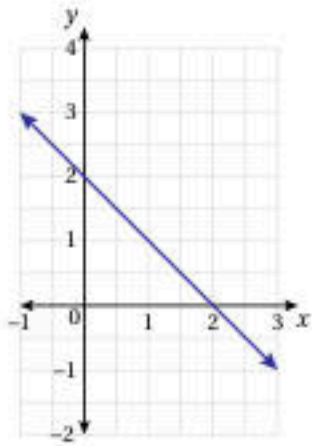


يبين الشكل المجاور العلاقة بين ارتفاع طائرة عمودية بالأمتار والزمن بالثواني اللازم لوصولها إلى سطح الأرض.

11 بعد كم ثانية تصل الطائرة إلى سطح الأرض؟

12 بعد كم ثانية تكون الطائرة على ارتفاع 15 m؟

13 ما مدلول المقطع y في هذه الحالة؟



21 أجد الميل والمقطعين
الإحداثيين للمستقيم المُمثل
في المستوى الإحداثي
المجاور.

تدريب على الاختبارات الدولية

22 ميل المستقيم المارّ بالنقطتين (a, b) و (c, d) هو:

a) $\frac{d-c}{b-a}$ b) $\frac{b-d}{a-c}$

c) $\frac{d-b}{a-c}$ d) $\frac{a-c}{b-d}$

23 مستقيم أفقي يمرّ بالنقطة $(5, 22)$ ، فأَيُّ النقاط الآتية
تقع على المستقيم؟

a) $(5, 2)$ b) $(0, 22)$

c) $(22, 5)$ d) $(0, 5)$

24 أيُّ المعادلات الآتية تمثل معادلة مستقيم أفقي؟

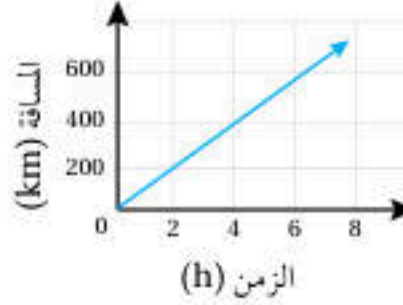
a) $3x + 6y = 0$ b) $2x + 7 = 0$

c) $-3y = 29$ d) $x - 2y = 4$

25 أيُّ المعادلات الآتية المقطع y لها لا يساوي 5؟

a) $2x = y - 5$ b) $3x + y = 5$

c) $y = x + 5$ d) $2x - y = 5$

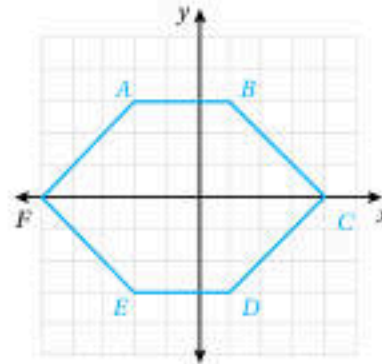


يبين التمثيل البياني
المجاور العلاقة بين
المسافة التي قطعها
شاحنة على طريق
مُنحدر والزمن الذي
استغرقته.

14 أجد المسافة التي قطعها الشاحنة بعد 4 ساعات من
انطلاقها.

15 هل تسير الشاحنة بسرعة ثابتة على الطريق؟ أبرّر إجابتي.

يبين الشكل الآتي المضلع السداسي $ABCDEF$.

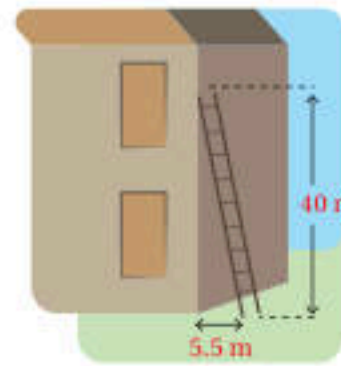


16 أجد ميل كلٍّ من:

$\vec{AE}$, $\vec{AD}$

17 أجد معادلة كلٍّ من:

$\vec{AB}$, $\vec{DC}$, $\vec{AF}$



18 أجد ميل السُّلم في
الشكل المجاور.

تمثل المعادلة $y = 5x + k$ مستقيماً يمرّ بالنقطة
 $(2, 11)$.

19 أجد قيمة k .

20 أجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم في الفرع
السابق المارّ بالنقطة $(4, 11)$.

المثلثات المتطابقة

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المثلثات كثيرًا في التصميم الهندسي؛ لأنَّ خصائصها الهندسية تضيف قوة كبيرة وجمالًا للتصميم؛ فأيُّ قوة تؤثر في المثلث تتوزع بالتساوي على أضلاعه، لذلك نرى المثلثات كثيرًا في الجسور، والمباني، وأعمدة الكهرباء العالية، والرافعات.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- إثبات تطابق مثلثين باستخدام حالات التطابق المتعددة.
- تعرّف خصائص المثلث المتطابق الضلعين والمتطابق الأضلاع.
- حلّ مسائل حياتية على تطابق المثلثات.

تعلّمت سابقًا:

- ✓ تصنيف المثلثات بحسب أطوال أضلاعها وزواياها.
- ✓ تمييز المضلعات المتطابقة، وتحديد العناصر المتناظرة في مضلعين متطابقين.
- ✓ حلّ مسائل تعتمد على مفهوم التطابق.



مشروع الوحدة: أبنّي جسرًا

3 أبدأ تصميم الجسر، وإصااق الأعواد بشكل جيد؛ لضمان ثبات الجسر، ويمكنني البحث عن مقاطع فيديو تساعدني على تنفيذ التصميم باستعمال الكلمات المفتاحية السابقة.

4 أعدّ عرضًا تقديميًا يتضمن صورَ جسرٍ معدنيةٍ عالميةٍ استعملت المثلثات في تصميمها. أضيف بعض المعلومات حول كل جسر، مثل: الطول، والبلد الذي يقع فيه، وتاريخ الإنشاء.

عرض النتائج:

- أعرّض جسري أمام الصف، وأحدد المثلثات المتطابقة فيه.
- أقدم العرض التقديمي، وأتحدث بالتفصيل حول الجسور التي يحتويها.
- نصوّت لأجمل جسر.



أستعدّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص، الذي سنوظف فيه ما نتعلمه في هذه الوحدة حول تطابق المثلثات، لعمل نموذج جسر.



المواد والأدوات اللازمة:

- أعواد آيس كريم.
- سيليكون لاصق.

خطوات تنفيذ المشروع:

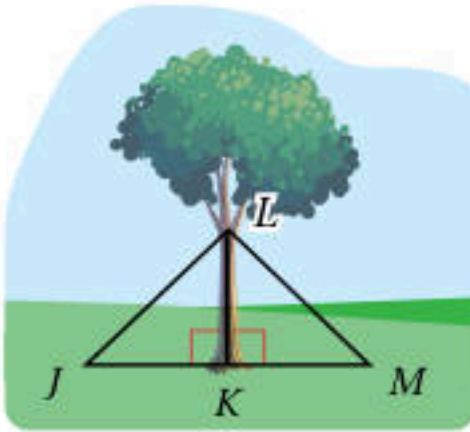
نُستعمل المثلثات المتطابقة كثيرًا في تصميم الجسور؛ لأنها توزع الأحمال بالتساوي بين أجزاء الجسر، مما يزيد من قدرته على تحمل الأثقال.

1 أبحث في شبكة الإنترنت عن تصاميم لجسور باستعمال أعواد الآيس كريم، بالاستعانة بالكلمات المفتاحية الآتية: ice cream stick bridge, popsicle stick bridge.

2 أختار تصميمًا جميلًا وجاذبًا للجسر، ثم أرسّم مخططًا له على ورقة، وأحرص على استعمال المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع بشكل متماثل في تصميمي.



أستكشف



يستعمل المزارعون طرائق مختلفة لدعم الأشجار الصغيرة، منها الطريقة المبينة في الشكل المجاور، حيث تثبت الشجرة بأسلاك تصل بين جذعها وأوتاد في الأرض.

ما العلاقة بين $\triangle LKM$ و $\triangle LKJ$ التي تجعل الشجرة أكثر ثباتاً؟

فكرة الدرس

- أثبت تطابق مثلثين باستعمال حالتَي SAS و SSS.
- أثبت تطابق مثلثين قائمي الزاوية باستعمال حالة HL.

المصطلحات

المسلمة، النظرية، البرهان، البرهان السهمي، الزاوية المحصورة، البرهان ذو العمودين.

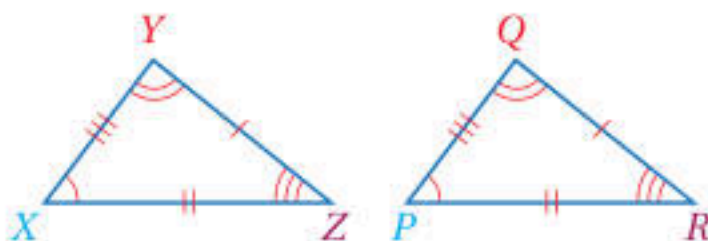
المسلمة (Postulate) عبارة رياضية تُقبل على أنها صحيحة من دون برهان، أما **النظرية** (theorem) فهي عبارة أو تخمين تحتاج إلى كتابة **برهان** (proof) لإثبات صحتها؛ فالبرهان دليل منطقي على كل عبارة مكتوبة فيه تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها، ويمكن استعمال العبارات أو التخمينات المثبت صحتها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى.

خطوات كتابة البرهان

مفهوم أساسي

- الخطوة 1:** أكتب المعطيات وأرسم شكلاً يوضحها إن أمكن.
- الخطوة 2:** أكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
- الخطوة 3:** أكوّن سلسلة من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
- الخطوة 4:** أبرر كل عبارة مستعملاً تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
- الخطوة 5:** أكتب العبارات أو التخمين الذي أثبته.

تعلمت سابقاً أنه إذا كانت الأضلاع المتناظرة في شكلين هندسيين متطابقة، وزواياهما المتناظرة متطابقة، فإن الشكلين متطابقان، فمثلاً المثلثان الآتيان متطابقان؛ لأن:



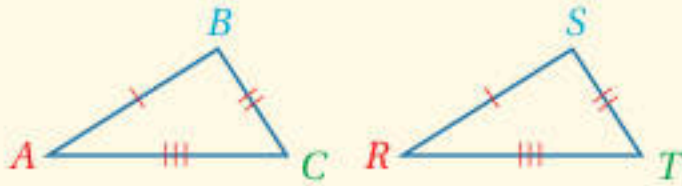
$$\begin{aligned}\overline{XZ} &\cong \overline{PR} & \angle Y &\cong \angle Q \\ \overline{XY} &\cong \overline{PQ} & \angle X &\cong \angle P \\ \overline{YZ} &\cong \overline{QR} & \angle Z &\cong \angle R\end{aligned}$$

الوحدة 4

لكن هذه المعلومات أكثر من كافية لإثبات تطابق مثلثين، إذ يمكن إثبات ذلك باستعمال تطابق الأضلاع المتناظرة فقط من دون الحاجة إلى بيان تطابق الأجزاء المتناظرة جميعها.

التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

مسلمة



• **بالكلمات:** إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان وتختصر هذه الحالة بالرمز SSS، حيث إن

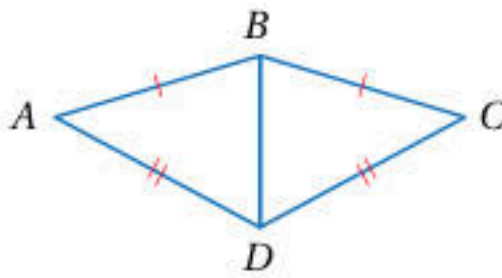
الحرف S هو اختصار للكلمة الانجليزية (Side) وتعني ضلعاً.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

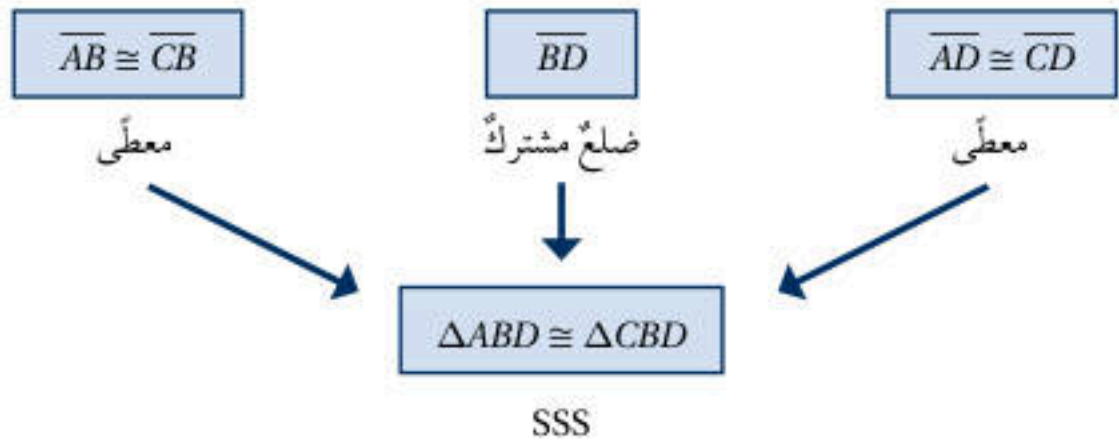
ويمكن استعمال البرهان السهمي (flow proof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان تستعمل فيه عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبين التسلسل المنطقي لهذه العبارات، ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله.

مثال 1



أثبت أن المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle CBD$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان باستعمال البرهان السهمي.

البرهان:

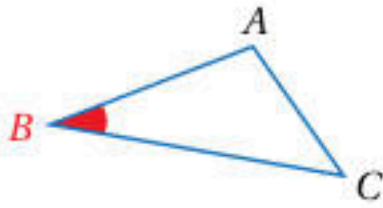
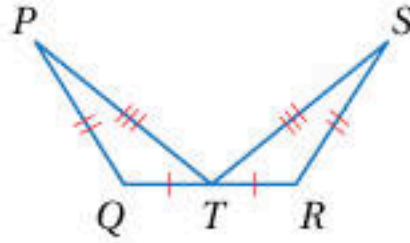


أعلم

يمكن كتابة البرهان السهمي بصورة رأسية أو أفقية.

أتحقق من فهمي:

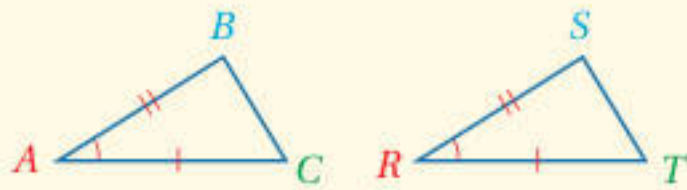
أثبت أن المثلثين $\triangle QPT$ و $\triangle RST$ المبيّنين في الشكل أدناه متطابقان باستعمال البرهان السهمي.



تُسمى الزاوية المتكوّنة من ضلعين متجاورين في مضلع الزاوية المحصورة (included angle)، ففي الشكل المجاور $\angle B$ محصورة بين الضلعين $\overline{BA}$ و $\overline{BC}$.
ومثلما يمكن استعمال حالة (SSS) لإثبات تطابق مثلثين، يمكن أيضًا استعمال زوجين من الأضلاع المتطابقة والزاوية المحصورة بينهما لإثبات تطابق مثلثين.

التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما (SAS)

مسلمة

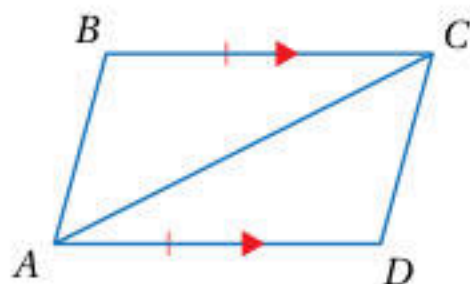


• **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة

بالرمز SAS، حيث إن الحرف S اختصاراً للكلمة الانجليزية (Side) وتعني ضلعاً، والحرف A اختصاراً للكلمة الانجليزية (Angle) وتعني زاوية.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\angle A \cong \angle R$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

ويمكن استعمال البرهان ذي العمودين (two-column proof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان تُكتب فيه العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود مواز له.

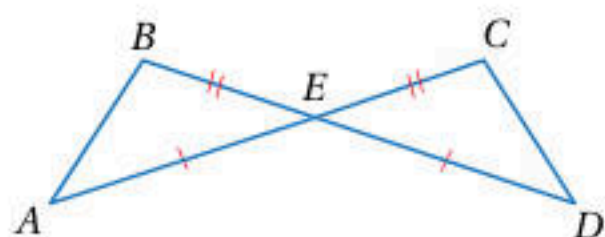


أثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (1)
(2) معطى	$\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ (2)
(3) زاويتان متبادلتان داخلياً	$\angle BCA \cong \angle DAC$ (3)
(4) ضلع مشترك	$\overline{AC}$ (4)
(5) SAS	$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (5)

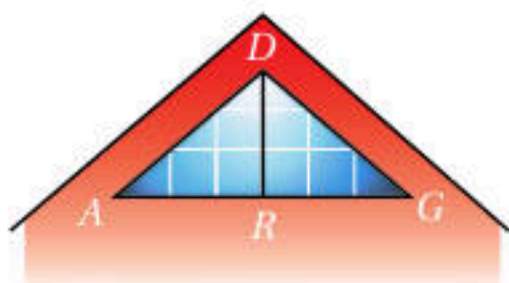
أتحقق من فهمي:



أثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

نحتاج في كثير من المسائل إلى تحديد حالة التطابق المناسبة لإثبات تطابق مثلثين، وفقاً للمعطيات المقدمة في المسألة.

مثال 3: من الحياة

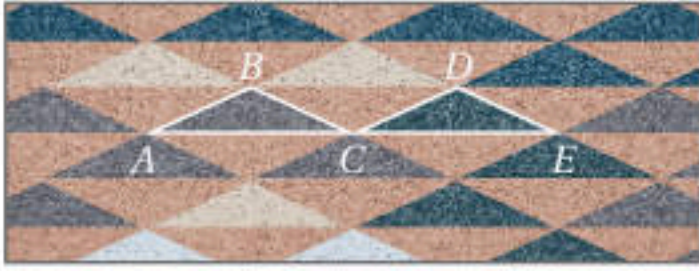


عمارة: صمّم مهندس معماري النافذة المجاورة. إذا كان $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ و $\angle ADR \cong \angle GDR$ ، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle DRA \cong \triangle DRG$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{DA} \cong \overline{DG}$ (1)
(2) معطى	$\angle ADR \cong \angle GDR$ (2)
(3) ضلع مشترك	$\overline{DR}$ (3)
(4) SAS	$\triangle DRA \cong \triangle DRG$ (4)

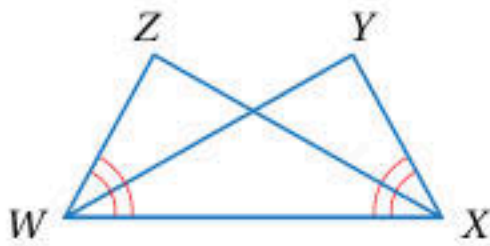
✓ **أتحقق من فهمي:**



بساط: يبين الشكل المجاور بساطاً تقليدياً يستعمل الحائك في تصميمه انسحاباً لمثلث متطابق الضلعين. أثبت أن $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ المبيّنين في الشكل متطابقان باستعمال البرهان ذي العمودين.

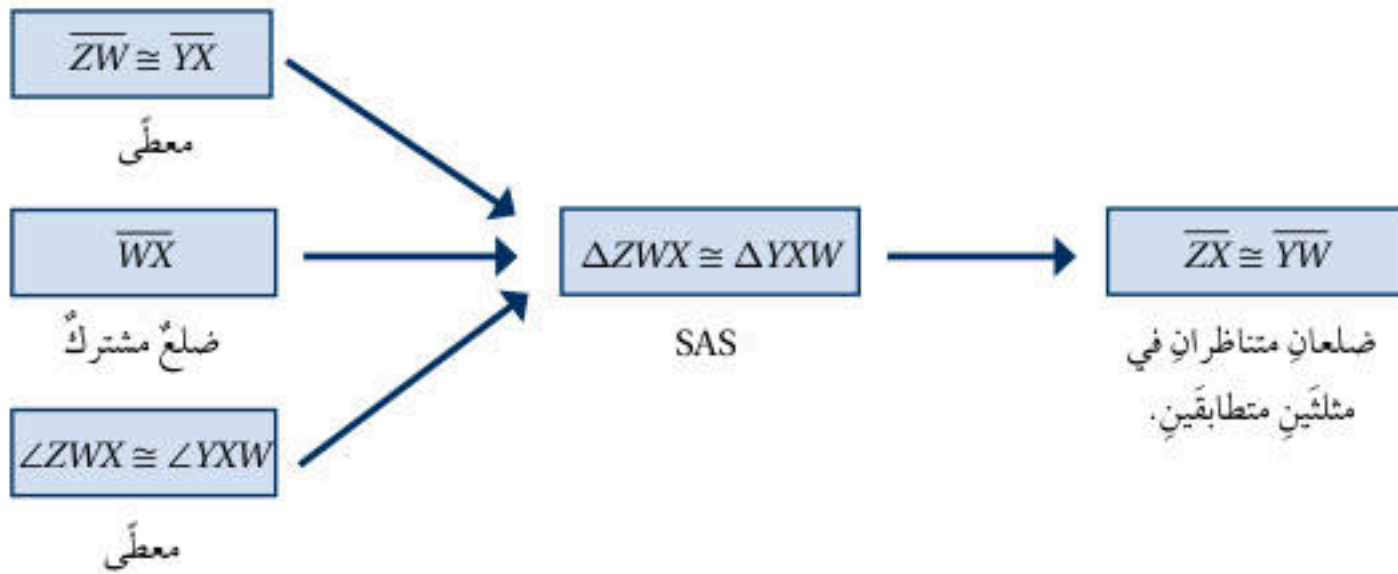
عند إثبات أن المثلثين متطابقين، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضاً وفق التعريف.

مثال 4

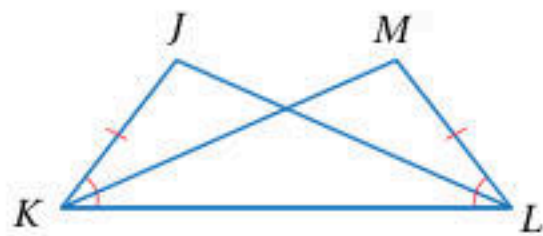


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle ZWX \cong \angle YXW$ و $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$ فأثبت أن $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$ باستعمال البرهان السهمي.

البرهان:



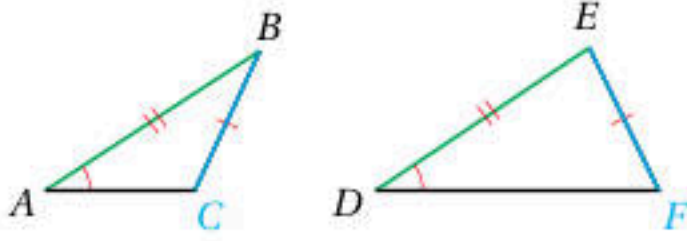
✓ **أتحقق من فهمي:**



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle JKL \cong \angle MLK$ و $\overline{JK} \cong \overline{ML}$ فأثبت أن $\angle J \cong \angle M$ باستعمال البرهان السهمي.

الوحدة 4

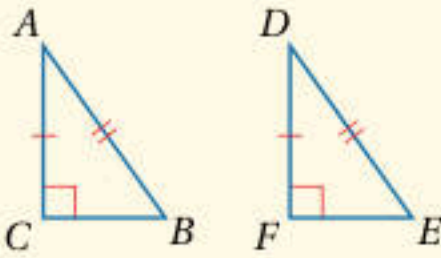
تعلمت في الأمثلة السابقة أنه يمكن استعمال حالتَي SAS و SSS في إثبات تطابق مثلثين. ولكن ماذا عن حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما؟



يبين الشكل المجاور مثلثين فيهما ضلعان متناظران متطابقان وزاوية غير محصورة تُطابق زاوية غير محصورة في المثلث الآخر. ولكن المثلثين غير متطابقين. ومن هنا يتبين أن حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما غير فعالة، إلا أنه يمكن استعمالها في إثبات تطابق مثلثين قائمي الزاوية؛ إذا تطابق الوتران، وتطابق ساقان في المثلثين.

تطابق المثلثات القائمة الزاوية بوتر وساق (HL)

نظرية



• **بالكلمات:** إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية وتر وساق في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.

وتختصر هذه الحالة بالرمز HL، حيث إن الرمز H اختصاراً للكلمة الإنجليزية (Hypotenuse) وتعني وتر، و L الحرف L اختصاراً للكلمة الإنجليزية (Leg) وتعني ساقاً.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 5



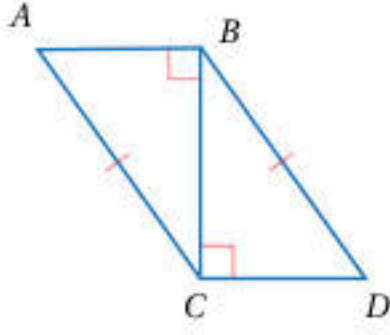
في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$ فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$
(2) معطى	(2) $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$
(3) تعريف المستقيمت المتعامدة	(3) $\angle WZY$, $\angle XYZ$ زاويتان قائمتان
(4) تعريف المثلث القائم الزاوية	(4) $\triangle WYZ$, $\triangle XZY$ مثلثان قائما الزاوية
(5) ضلع مشترك	(5) $\overline{ZY}$
(6) HL	(6) $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

✓ **أتحقق من فهمي:**

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور في كتابة برهان ذي عمودين؛
لأثبت أن $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

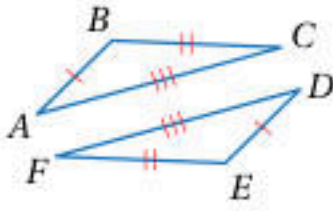


أتدرب
وأحل المسائل

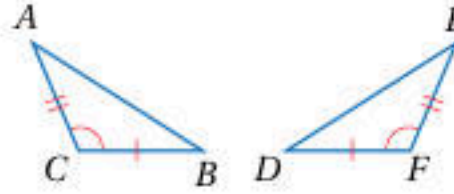


أبين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، وأبرر إجابتي:

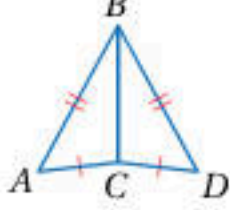
1



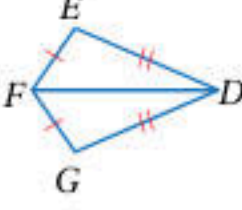
2



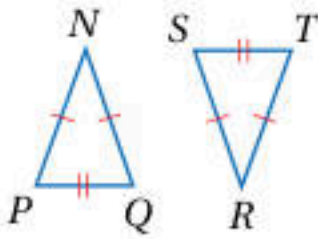
3



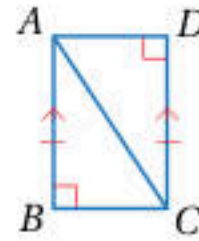
4



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت أن $\Delta NPQ \cong \Delta RST$



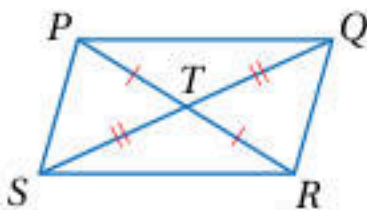
أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت أن $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



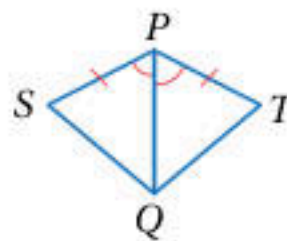
أتذكر

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن لكل زاويتين متبادلتين داخلياً القياس نفسه.

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن $\Delta PQT \cong \Delta RST$

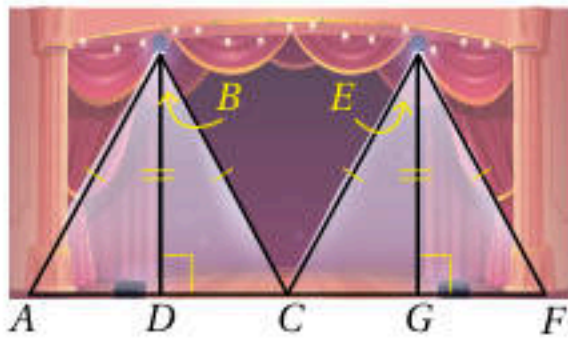
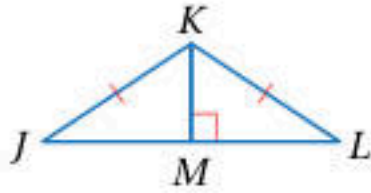


أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن $\Delta SPQ \cong \Delta TPQ$

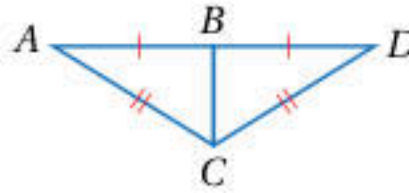


الوحدة 4

10 أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{JM} \cong \overline{ML}$

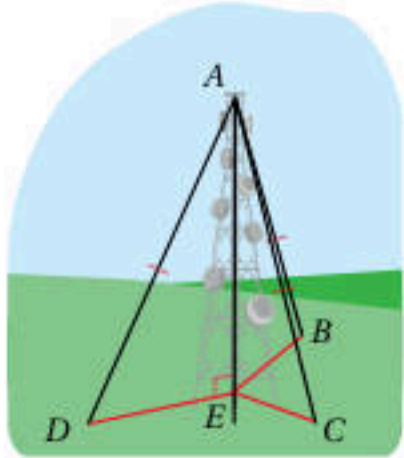


9 أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودينٍ؛ لأثبتَ أنَّ $\angle A \cong \angle D$

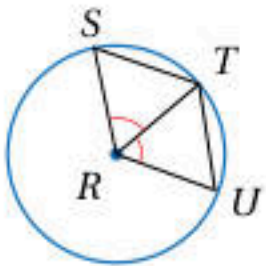


مصباحٌ: يبينُ الشكلُ المجاورُ الضوءَ الناشئَ عن مصباحين يبعدان المسافة نفسها عن أرضية مسرح: أثبتُ أنَّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

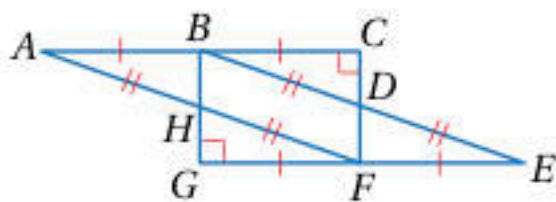
هل المثلثاتُ الأربعةُ الموضَّحةُ في الشكلِ متطابقةٌ؟ أبرِّرْ إجابتي.



اتصالاتٌ: برجُ اتصالاتٍ عموديٌّ على الأرض، يتصلُ رأسُهُ بكلِّ من النقاطِ D و B و C عن طريق كابلاتٍ لها الطولُ نفسهُ كما في الشكلِ المجاور. أثبتُ أنَّ $\triangle AEB$ و $\triangle AEC$ و $\triangle AED$ متطابقةٌ.



تبريرٌ: في الشكلِ المجاور، إذا علمتُ أنَّ $\angle SRT \cong \angle URT$ ، و R مركزُ الدائرة، فأكتبُ برهانًا ذا عمودينٍ؛ لإثباتِ أنَّ $\triangle TRS \cong \triangle TRU$ ، وأبرِّرْ إجابتي.



تحدُّ: أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ المجاور؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ACF \cong \triangle EGB$

أكتبُ: كيفَ أتحقَّقُ من تطابقِ مثلثين بثلاثةِ أضلاعٍ، أو ضلعين وزاويةٍ محصورةٍ بينهما؟



معلومة

اختراعُ العالمِ (غراهام بِل) النموذجِ الأوليِّ للهاتفِ عامَ 1876، إذ حاولَ إيجادَ وسيلةٍ لمساعدةِ الصُّمِّ.

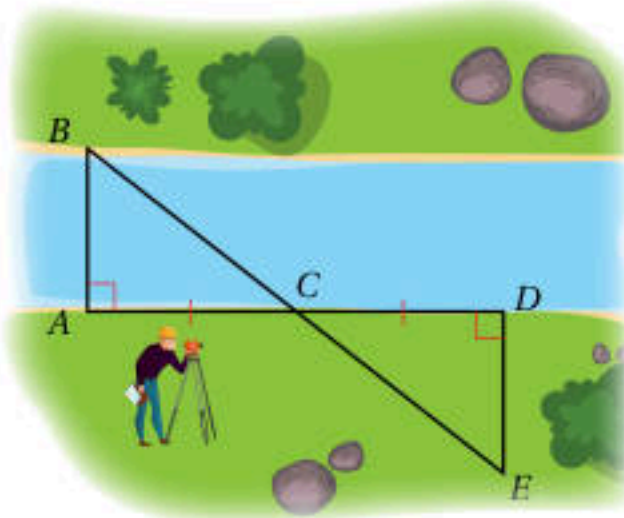
مهاراتُ التفكيرِ العليا

أتذكَّرُ

أطوالُ أنصافِ أقطارِ الدائرةِ متساويةٌ في الطولِ.

إرشادٌ

أرسمُ $\triangle ACF$ و $\triangle EGB$ بشكلٍ منفصلٍ.



أستكشف

يظهر في الشكل المجاور مساح يقس عرض نهر مستعملًا تطابق المثلثات. أصف كيف يمكنه ذلك؟

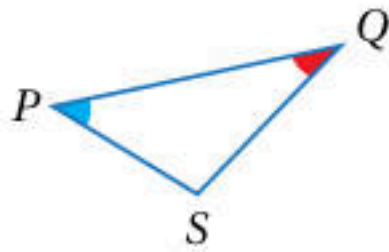
فكرة الدرس

أثبت تطابق مثلثين باستعمال حالتَي ASA و AAS.

المصطلحات

الضلع المحصور.

تعلمت في الدرس السابق كيف أثبت تطابق مثلثين باستعمال ثلاثة أضلاع أو ضلعين وزاوية محصورة بينهما، وسأتعلم في هذا الدرس حالات أخرى لإثبات تطابق مثلثين.

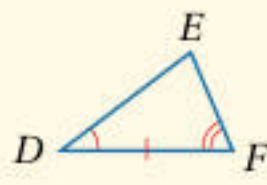
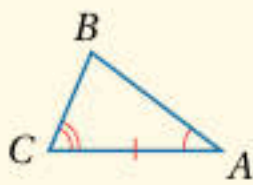


يسمى الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع الضلع المحصور (included side). ففي المثلث المجاور PQ هو الضلع المحصور بين $\angle P$ و $\angle Q$.

يمكن إثبات تطابق مثلثين باستعمال زوج من الأضلاع المتطابقة وزوجين من الزوايا المتطابقة في المثلثين.

التطابق بزائيتين وضلع محصور بينهما (ASA)

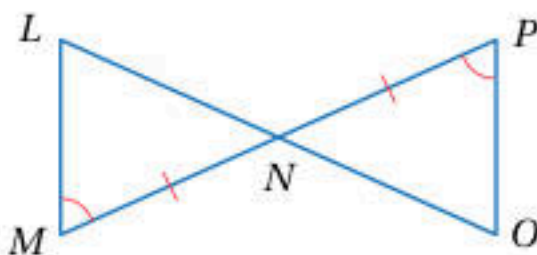
مسلمة



• **بالكلمات:** إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز ASA.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 1



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{NM} \cong \overline{NP}$ و $\angle M \cong \angle P$ ، فأثبت أن $\triangle NML \cong \triangle NPO$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

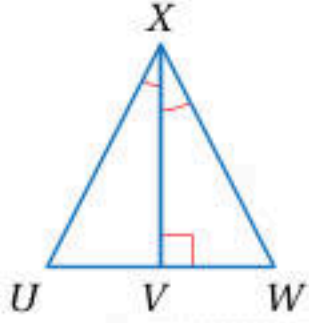
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{NM} \cong \overline{NP}$ (1)
(2) معطى	$\angle M \cong \angle P$ (2)
(3) زاويتان متقابلتان بالرأس	$\angle MNL \cong \angle PNO$ (3)
(4) ASA	$\triangle NML \cong \triangle NPO$ (4)

أتحقق من فهمي:



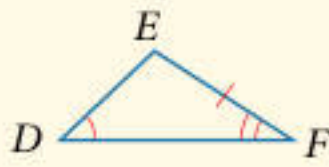
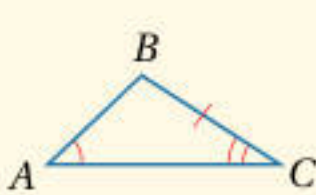
في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle UXV \cong \angle WXV$ ، فأثبت أن $\triangle UXV \cong \triangle WXV$ باستعمال البرهان ذي العمودين.



ويمكن أيضًا إثبات تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلع غير محصور بينهما.

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

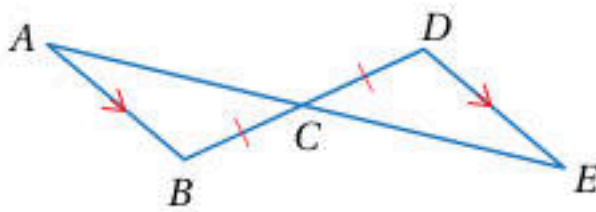
نظرية



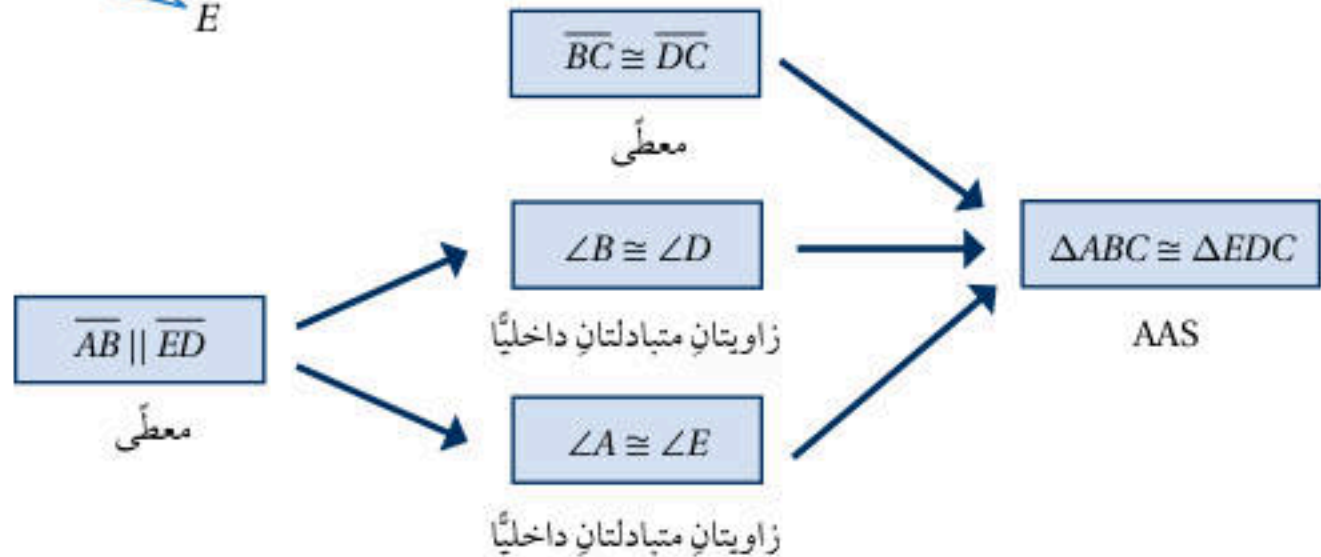
• **بالكلمات:** إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز AAS.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

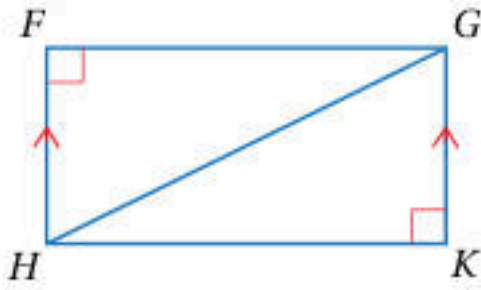
مثال 2



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ ، فأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ باستعمال البرهان السهمي.



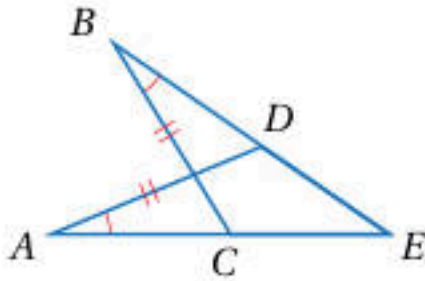
✓ أتتحقق من فهمي:



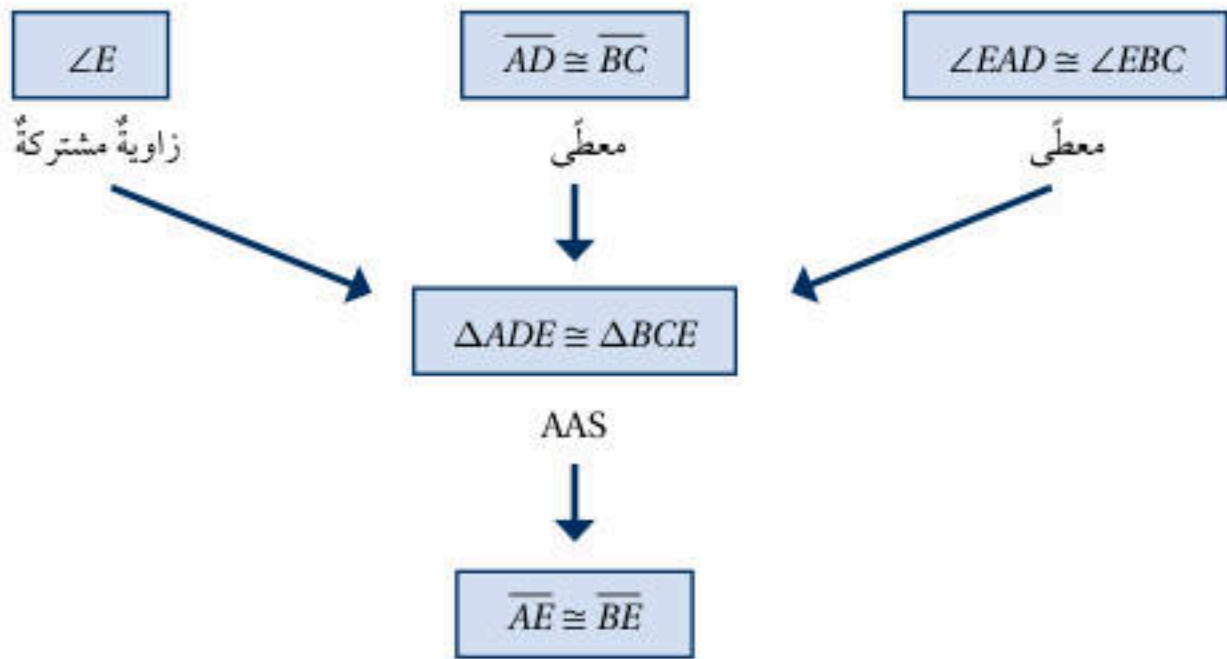
في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{HF} \parallel \overline{GK}$ ، وأن $\angle F$ و $\angle K$ زاويتان قائمتان، فأثبت أن $\triangle HFG \cong \triangle GKH$ باستعمال البرهان السهمي.

تعلمت في الدرس السابق أنه عند إثبات أن المثلثين متطابقين، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضًا وفق التعريف.

مثال 3

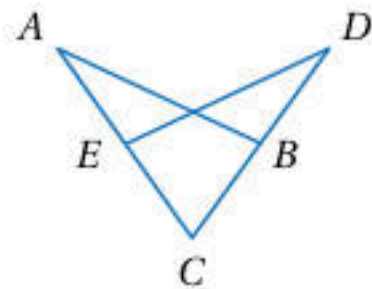


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle EAD \cong \angle EBC$ ، $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فأثبت أن $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ باستعمال البرهان السهمي.



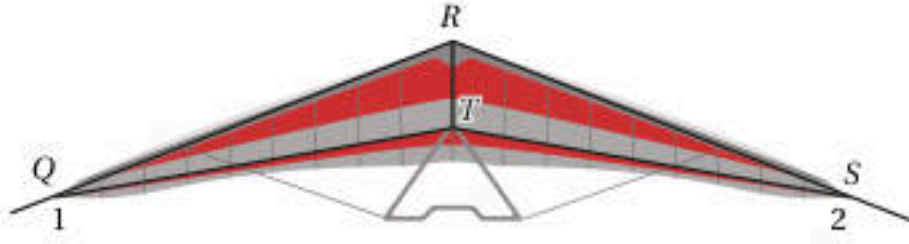
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

✓ أتتحقق من فهمي:



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle ABC \cong \angle DEC$ ، $\overline{CA} \cong \overline{CD}$ ، فأثبت أن $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

تُستعمل المثلثات المتطابقة في كثير من التصميمات؛ لِمَا لَهَا مِنْ أهمية في ضمان دعم الأشياء وتوازنها مِنْ حولنا.



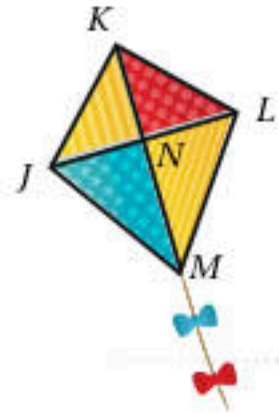
طائرة شراعية: يصمم جناحا الطائرة الشراعية بحيث يبدوان مثلثين متطابقين كما في الشكل المجاور؛ لضمان توازن الطائرة في الجو. إذا

كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle RTQ \cong \angle RTS$ ، فأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

لأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$ ، فلا بد أولاً إثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\angle 1 \cong \angle 2$ (1)
(2) معطى	$\angle RTQ \cong \angle RTS$ (2)
(3) زاويتان متكاملتان مع الزاويتين المتطابقتين $\angle 1$ و $\angle 2$	$\angle RQT \cong \angle RST$ (3)
(4) ضلع مشترك	$\overline{RT}$ (4)
(5) AAS	$\triangle RQT \cong \triangle RST$ (5)
(6) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين	$\overline{QT} \cong \overline{ST}$ (6)

أتحقق من فهمي:



طائرة ورقية: إذا كانت N في الطائرة الورقية المجاورة نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، و $\overline{KM} \perp \overline{JL}$

و $\angle KLN \cong \angle KJN$ ، فأثبت أن $\overline{KJ} \cong \overline{KL}$

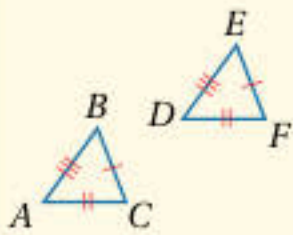
تعلمت طرائق عدة لإثبات تطابق المثلثات يمكن تلخيصها في الجدول الآتي:

إثبات تطابق المثلثات

ملخص المفهوم

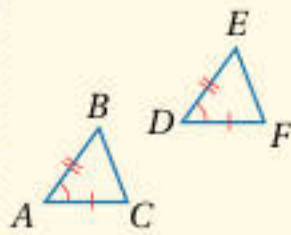


SSS



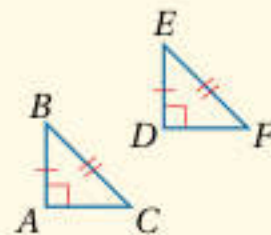
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

SAS



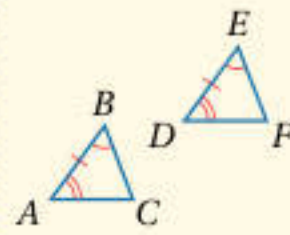
يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر.

HL (مثلثات قائمة الزاوية فقط)



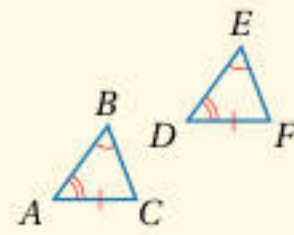
يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر.

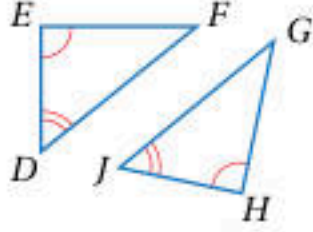
AAS



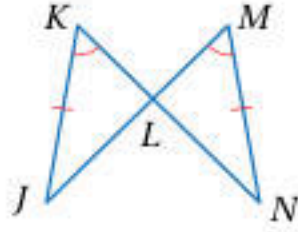
يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر.

أحدد أنه يمكن إثبات تطابق كل زوج من المثلثات الآتية أم لا، وأبرر إجابتي:

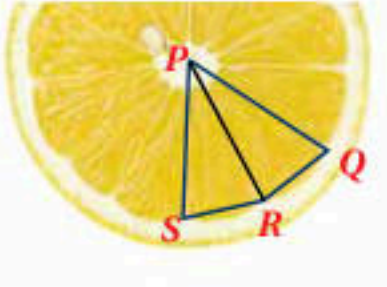
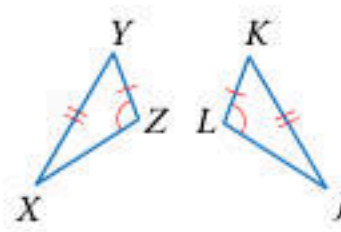
1 $\triangle DEF, \triangle JHG$



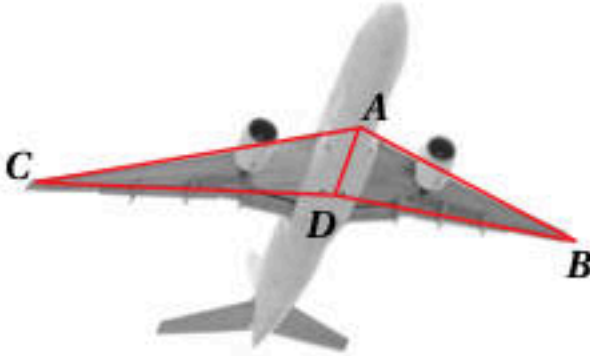
2 $\triangle JKL, \triangle NML$



3 $\triangle XYZ, \triangle JKL$



4 في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{PR}$ ينصف $\angle QPS$ ،
و $\angle QRP \cong \angle SRP$ ، فأثبت أن $\triangle QRP \cong \triangle SRP$

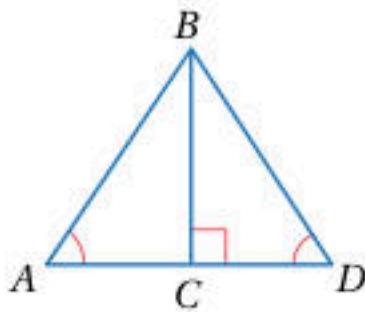


5 في الشكل المجاور، إذا علمت أن
 $\angle ADB \cong \angle ADC$ ، $\overline{DB} \cong \overline{DC}$
 $\angle ABD \cong \angle ACD$ ، فأثبت أن
 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

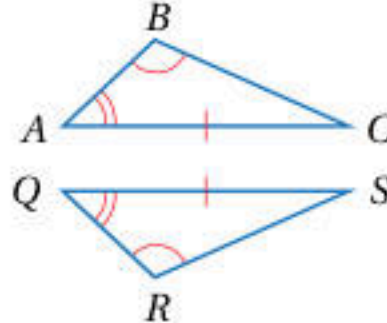
معلومة

يمكن للطائرة أن تحلق
لبعض الوقت من دون
محركات، وذلك بفضل
التصميم الانسيابي
والدقيق للأجنحة.

6 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل
الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت
أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$



7 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل
الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت
أن $\triangle ABC \cong \triangle QRS$

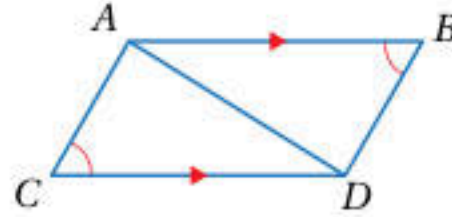


الوحدة 4

8 أستمعلُ المعلوماتَ المعطاةَ في

الشكل الآتي، لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛

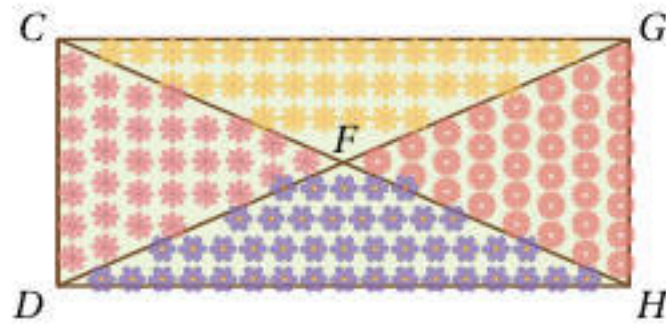
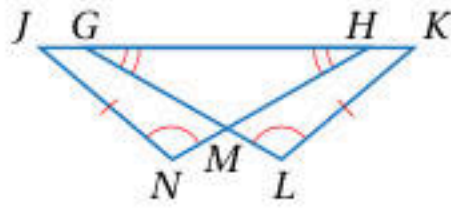
لأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{DB}$



9 أستمعلُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكل

الآتي، لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبت أن

$\overline{GK} \cong \overline{HJ}$



حديقة: تخططُ سالي لزراعة

حديقته مستطيلة الشكل بأنواع

مختلفة من الزهور في أربعة

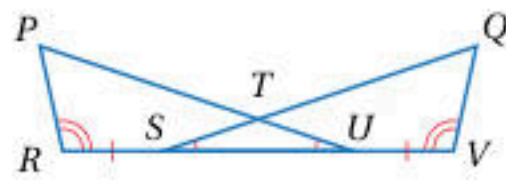
أحواضٍ مثلثة الشكل كما في

الشكل المجاور. إذا علمتُ أن F نقطة منتصف $\overline{DG}$ و $\angle CDF \cong \angle FGH$ ، فأثبتُ أن:

10 $\triangle CDF \cong \triangle FGH$

11 $\overline{CF} \cong \overline{HF}$

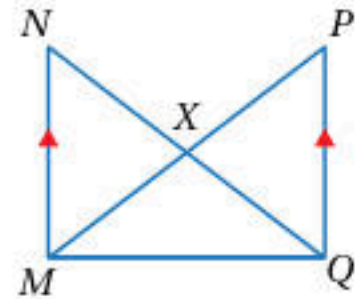
نهر: أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأثبتُ أن $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



تحد: أستمعلُ المعلوماتَ المعطاةَ

في الشكل المجاور لكتابة برهانٍ ذي

عمودين؛ لأثبت أن $\triangle PUR \cong \triangle QSV$



تبرير: هل يمكنُ إثباتُ تطابقِ $\triangle MNQ \cong \triangle QPM$

بالاعتماد على المعلوماتَ المعطاةَ على الشكل

المجاور؟ أبررُ إجابتي.

أكتب: كيف أتحقق من تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلع محصور بينهما؟



معلومة

تعتمدُ أجهزة المساحة الحديثة على نظام تحديد المواقع العالمي (GPS)

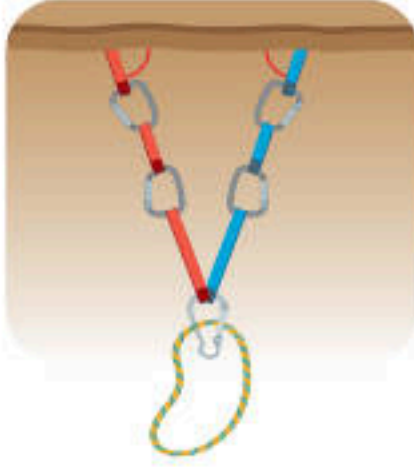
مهارات التفكير العليا

13

14

15

أستكشف



يبيّن الشكل المجاور مرسّاتين باللونين الأحمر والأزرق لهما الطول نفسه، ثبتّهما متسلّق في شقّ صخريّ في أثناء تسلّقه أحد الجبال. ما العلاقة بين الزاويتين المكوّنتين بين كلّ من المرسّاتين والشقّ الصخريّ؟

فكرة الدرس

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المصطلحات

الساقان، زاوية الرأس، القاعدة، زاويتا القاعدة، النتيجة.



تعلّمتُ سابقاً أنّ المثلث المتطابق الضلعين هو المثلث الذي فيه ضلعان متطابقان على الأقلّ. إنّ لأجزاء المثلث المتطابق الضلعين أسماء خاصة، إذ يسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين** (legs)، وتسمّى الزاوية التي ضلعاها الساقان **زاوية الرأس** (vertex angle)، ويسمّى الضلع الثالث **القاعدة** (base). والزاويتان المكوّنتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تسميان **زاويتي القاعدة** (base angles).

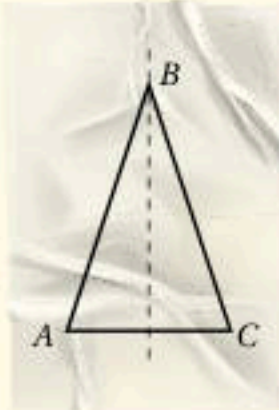
سأستكشف في النشاط الآتي العلاقة بين زاويتي القاعدة والساقين في المثلث المتطابق الضلعين.

المثلث المتطابق الضلعين

نشاط هندسيّ



الإجراءات:



1 **الخطوة** أرسم المثلث ABC المتطابق الضلعين على ورقة شفافة، كما في الشكل المجاور، حيث $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

2 **الخطوة** أطوي المثلث حول الرأس B بحيث ينطبق الساقان على بعضهما تماماً.

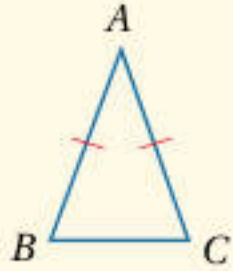
أحلّ النتائج:

- ماذا ألاحظ بالنسبة للزاويتين $\angle A$ و $\angle C$ ؟
- أرسم مثلثاً آخر متطابق الضلعين، وأقارن بين زاويتي القاعدة. ماذا أستنتج؟

يمكنني ملاحظة النظريات الآتية من النشاط الهندسي السابق:

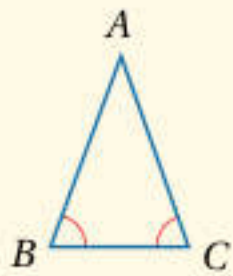
المثلث المتطابق الضلعين

نظريات



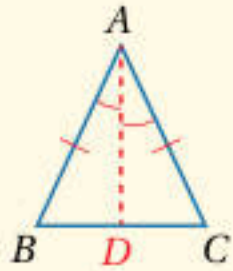
نظرية المثلث المتطابق الضلعين

- **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ فإن $\angle B \cong \angle C$



عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

- **بالكلمات:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.
- **بالرموز:** إذا كان $\angle B \cong \angle C$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



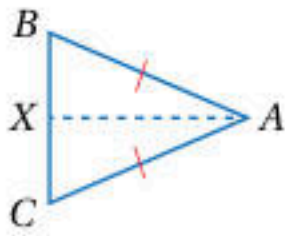
منصف زاوية الرأس

- **بالكلمات:** يكون منصف زاوية الرأس عمودياً على القاعدة، وينصفها.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ و $\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$ ، فإن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BD}$

مثال 1: إثبات نظرية

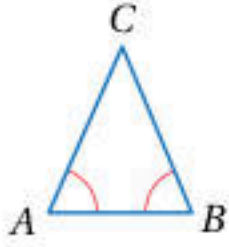


في $\triangle ABC$ ، إذا علمت أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فأثبت أن $\angle B \cong \angle C$ باستعمال البرهان ذي العمودين.



المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افرض أن X نقطة منتصف $\overline{BC}$
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) أرسم قطعة مساعدة $\overline{AX}$
(3) X نقطة منتصف $\overline{BC}$	(3) $\overline{BX} \cong \overline{CX}$
(4) معطى	(4) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(5) ضلع مشترك	(5) $\overline{AX}$
(6) SSS	(6) $\triangle ABX \cong \triangle ACX$
(7) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين	(7) $\angle B \cong \angle C$

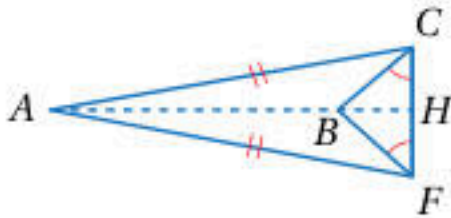
✓ أتتحقق من فهمي:



في ΔABC ، إذا علمت أن $\angle A \cong \angle B$ ، فأثبت أن $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

يمكنني استعمال نظريات المثلث المتطابق الضلعين في تحديد القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة في أشكال هندسية تحتوي مثلثات متطابقة الضلعين.

مثال 2



1 أسمى زاويتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل:

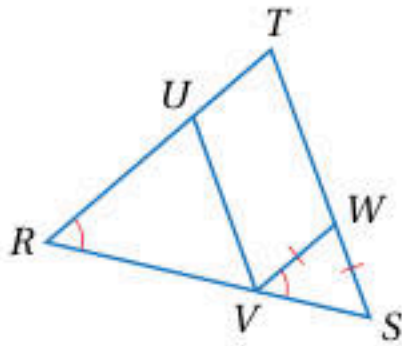
$\angle AFC$ تقابل $\angle ACF$ و $\overline{AC}$ تقابل $\overline{AF}$ ؛ لذا فإن $\angle AFC \cong \angle ACF$

(نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

2 أسمى قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل:

$\overline{BC}$ تقابل $\angle BFC$ و $\overline{BF}$ تقابل $\angle BCF$ ؛ لذا فإن $\overline{BC} \cong \overline{BF}$

(عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)



✓ أتتحقق من فهمي:

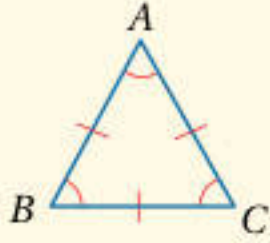
3 أسمى زاويتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل.

4 أسمى قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل.

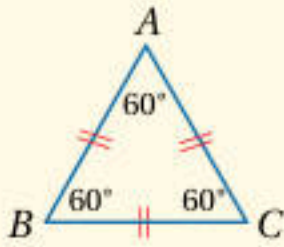
أفكر

المثلث المتطابق
الأضلاع أضلاعه
الثلاثة متطابقة.

النتيجة (Corollary) هي نظرية يكون برهانها مبنياً على نظرية أخرى. ويمكن استعمال النتيجة لتبرير خطوات البراهين، أو حل أسئلة ذات علاقة. وفي ما يأتي نتيجتان لنظرية المثلث المتطابق الضلعين، وعكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين:



- **بالكلمات:** يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
- **بالرموز:** $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقط إذا كان $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

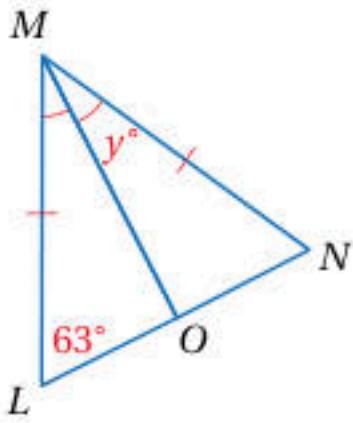


- **بالكلمات:** قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60°
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإن $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60^\circ$

يمكن استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3

1 أجد قيمة y في الشكل المجاور.



بما أن $\angle NMO \cong \angle LMO$ إذن $\overline{MO}$ منصف لزاوية الرأس في مثلث متطابق الضلعين، وبذلك فإن $\overline{MO} \perp \overline{LN}$ ، ومنه $m\angle MON = 90^\circ$.
وبما أن $\triangle MLN$ متطابق الضلعين، فإن $\angle N \cong \angle L$ ، ومنه فإن $m\angle N = 63^\circ$.

$$m\angle N + m\angle MON + y^\circ = 180^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث

$$63^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle N = 63^\circ, m\angle MON = 90^\circ \text{ أعوض}$$

$$153^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

أجمع

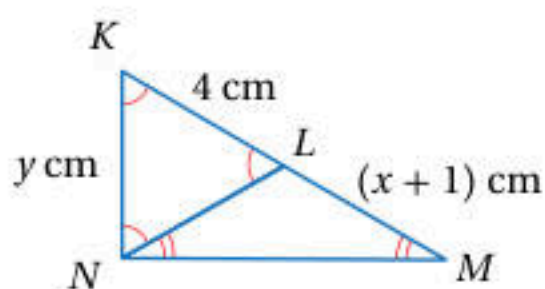
$$y^\circ = 27^\circ$$

أطرح 153° من طرفي المعادلة

إذن، قيمة y تساوي 27

2

أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.



الخطوة 1 أجد قيمة y

بما أن $\angle KNL \cong \angle LKN \cong \angle LNM$ ، فإن $\triangle KLN \cong \triangle LMN$ متطابق الأضلاع، ومنه فإن $y = 4$ cm.

الخطوة 2 أجد قيمة x

بما أن $\angle LNM \cong \angle LMN$ ، فإن $\overline{LN} \cong \overline{LM}$ ، ومنه فإن $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. وبما أن $\triangle KLN$ متطابق الأضلاع، فإن $LN = 4$.

$$LN = LM$$

$$4 = x + 1$$

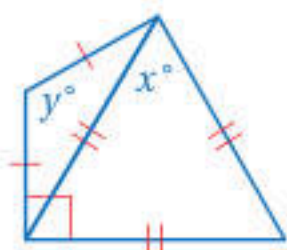
$$x = 3$$

قطعتان مستقيمتان متطابقتان

$$LN = 4, LM = x + 1$$

أطرح 1 من طرفي المعادلة

إذن، قيمة x تساوي 3 cm



أتحقق من فهمي:



3

أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.

يمكن رؤية المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع في كثير من التصميمات والهياكل والجسور والمباني؛ لِمَا لَهَا مِنْ أهمية في دعمها وجعلها أكثر ثباتًا.



مثال 4: من الحياة

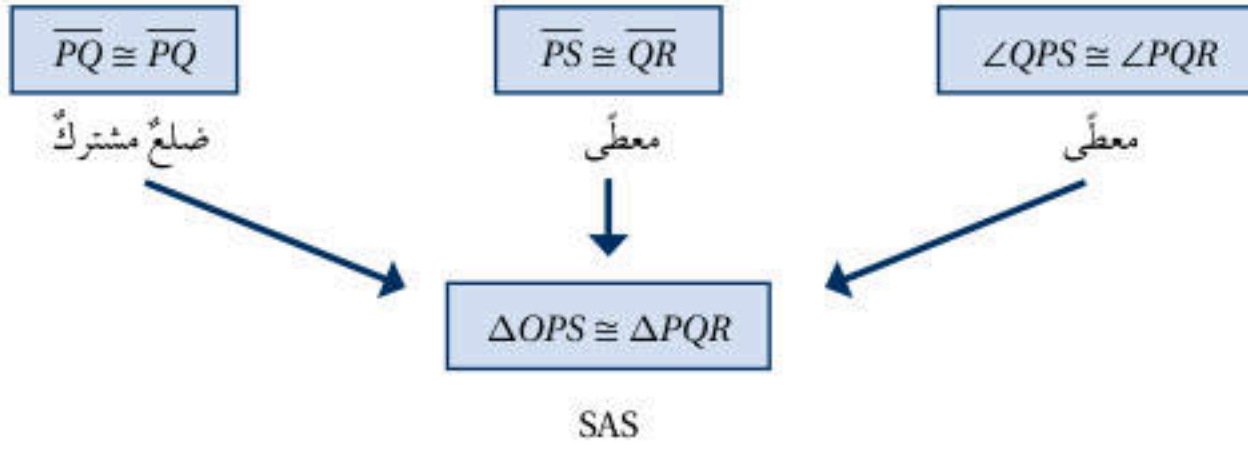


برج المنقذ: في برج المنقذ المجاور، إذا علمت أن $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\angle QPS \cong \angle PQR$ ، فأثبت أن:

$$\triangle QPS \cong \triangle PQR$$

1

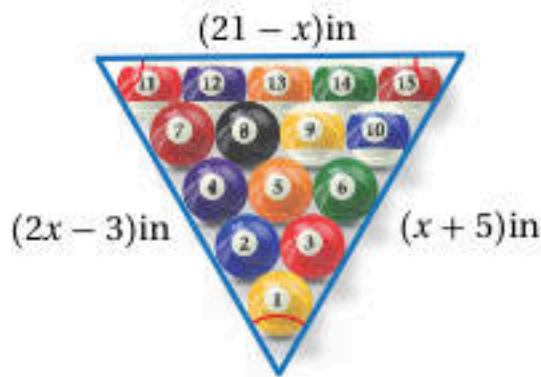
الوحدة 4



2 $\triangle QPT$ متطابق الضلعين.

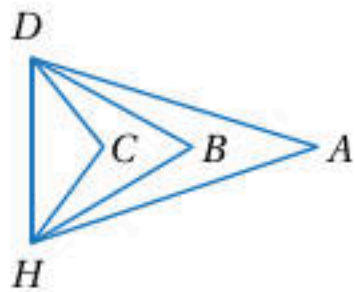
المبررات	العبارات
(1) زاويتان متقابلتان بالرأس.	(1) $\angle PTS \cong \angle QTR$
(2) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين.	(2) $\angle PSQ \cong \angle QRP$
(3) معطى.	(3) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$
(4) AAS	(4) $\triangle QTR \cong \triangle PTS$
(5) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين.	(5) $\overline{PT} \cong \overline{QT}$
(6) تعريف المثلث المتطابق الضلعين.	(6) $\triangle QPT$ متطابق الضلعين

أتحقق من فهمي:



بلياردو: تُرتَّب كرات البلياردو على شكل مثلث متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور؛ لأنَّ شكل المثلث قادرٌ على نقل الطاقة الحركية من الكرة الأولى في الواجهة إلى غيرها من الكرات، فتتحرك كلها من ضربة واحدة. أجد قيمة المتغير x .

أدرب وأحل المسائل

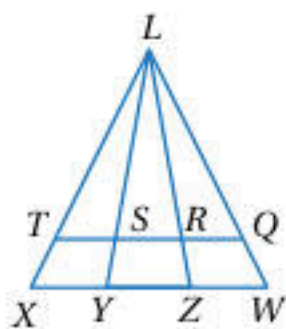


باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان $\overline{AD} \cong \overline{AH}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

2 إذا كان $\angle BDH \cong \angle BHD$ ، فأسمي قطعتين

مستقيمتين متطابقتين.



باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

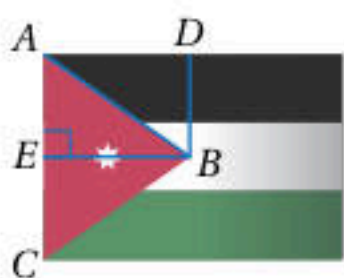
إذا كان $\overline{LT} \cong \overline{LQ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

إذا كان $\overline{LX} \cong \overline{LW}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

إذا كان $\overline{LY} \cong \overline{LZ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

إذا كان $\angle LXW \cong \angle LWX$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

إذا كان $\angle LSR \cong \angle LRS$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.



العلم الأردني: العلم الأردني مستطيل طوله مثلاً عرضه،

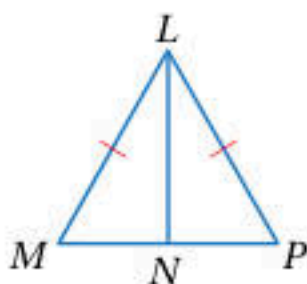
فيه مثلث متطابق الضلعين لونه أحمر، وارتفاع المثلث $\overline{BE}$

يساوي نصف طول العلم. أثبت أن $\triangle DAB \cong \triangle EBA$

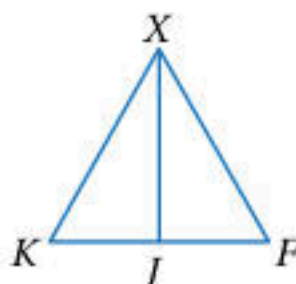
أتعلم

يمثل المثلث الأحمر في العلم الأردني السلالة الهاشمية.

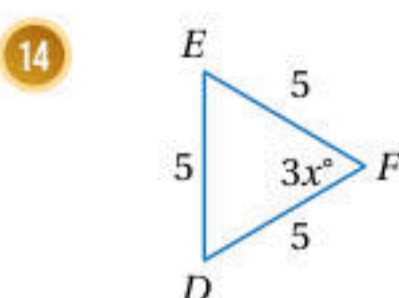
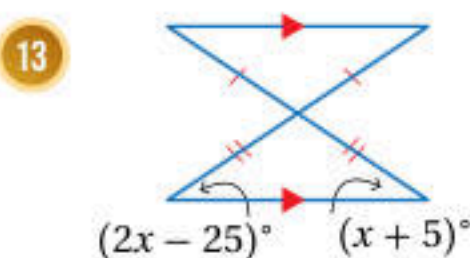
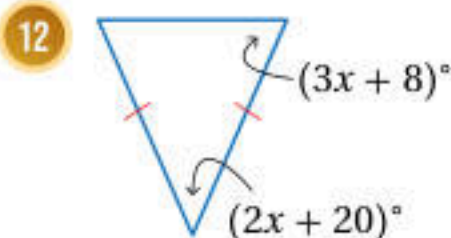
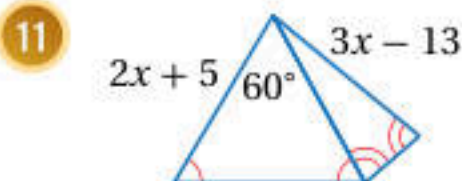
في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle MLP$ متطابق الضلعين، و N نقطة منتصف $\overline{MP}$ ، فأكتب برهاناً سهماً؛ لإثبات أن $\overline{LN} \perp \overline{MP}$



في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع، و $\overline{XJ}$ ينصف $\angle X$ ، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن J نقطة منتصف $\overline{KF}$.



أجد قيمة x في كل مما يأتي:

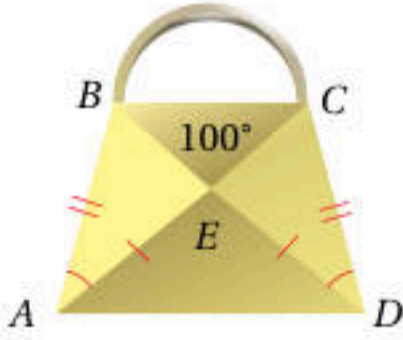


أتذكر

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

الوحدة 4

حقيبة: يبين الشكل المجاور تصميمًا لحقيبة قماشية:



أثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle DCE$

أسمي المثلثات المتطابقة الضلعين في الحقيبة.

أسمي ثلاث زوايا تتطابق مع $\angle EAD$

أتذكر

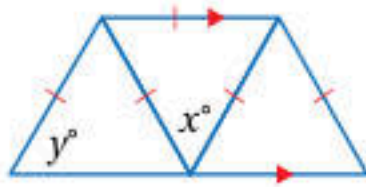
مجموع قياسات الزوايا
على مستقيم يساوي 180°

مهارات التفكير العليا

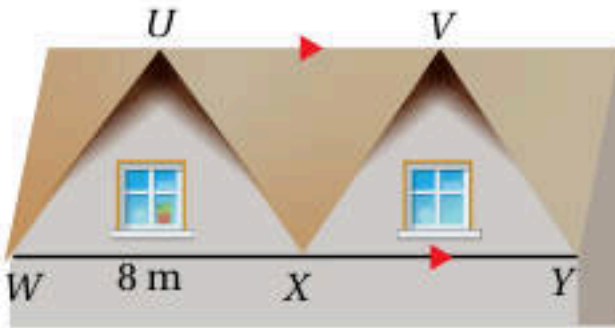
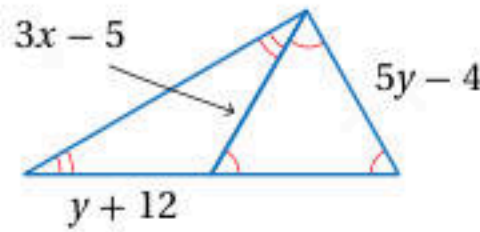
إرشاد

أبدأ بإيجاد قياسات الزوايا
من المثلث الداخلي FCG

18



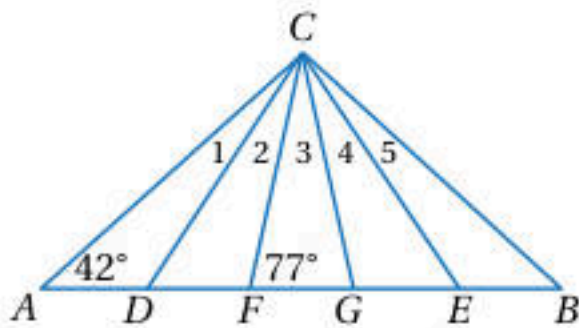
19



تبرير: يبين الشكل المجاور الواجهة
الأمامية لمنزل على شكل مثلثين
متطابقين الضلعين رأساهما U و V
حيث $\triangle WUX \cong \triangle XUY$

أسمي زاويتين متطابقتين مع $\angle WUX$ ، وأبرر إجابتي.

أجد المسافة بين الرأسين U و V ، وأبرر إجابتي.



تحذر: في الشكل المجاور، إذا علمت أن

$\triangle ABC$ متطابق الضلعين، و $\triangle DCE$

متطابق الأضلاع، و $\triangle FCG$ متطابق

الضلعين، فأجد قياسات الزوايا

1 و 2 و 3 و 4 و 5.

كيف أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتطابق الأضلاع 60° ؟

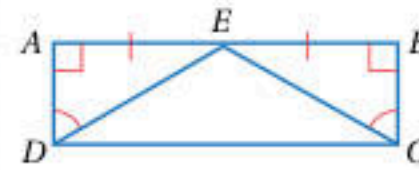
أكتب

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

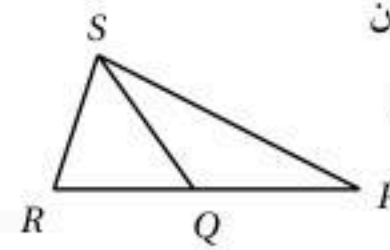
1 إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ فأَيُّ الجمل الآتية صحيحة؟

- a) $\overline{BC} \cong \overline{ZX}$ b) $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{YZ}$ d) $\overline{AC} \cong \overline{XY}$



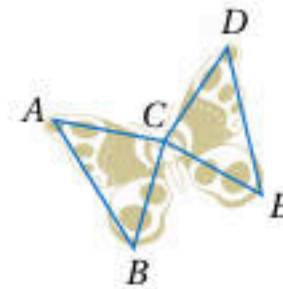
2 بناءً على المعلومات المُعطاة على الشكل المجاور، أيُّ ممَّا يأتي تُستعمل لإثبات أن $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ ؟

- a) SAS b) ASA c) AAS d) HL



3 في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ و $\overline{QR} \cong \overline{RS}$ و $m\angle PRS = 72^\circ$ فما قياس $\angle QPS$ ؟

- a) 27° b) 54° c) 63° d) 72°



4 تبدو أجنحة بعض الفراشات على شكل مثلثات متطابقة كما في الشكل المجاور. إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{DC}$

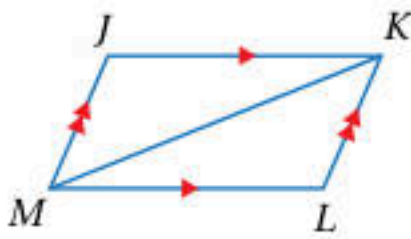
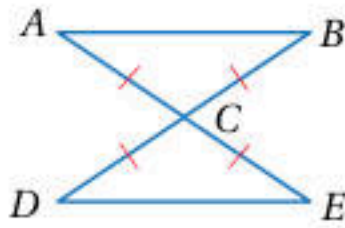
و $\angle ACB \cong \angle ECD$ ، فما العبارة الإضافية التي أحتاج إليها؛ لأثبت أن $\triangle ACB \cong \triangle ECD$ ؟

- a) $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ b) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$
c) $\angle BAC \cong \angle CED$ d) $\angle ABC \cong \angle CDE$

5 إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ، وكان $m\angle A = 47.1^\circ$ و $m\angle C = 13.8^\circ$ فإن $m\angle Y$ يساوي:

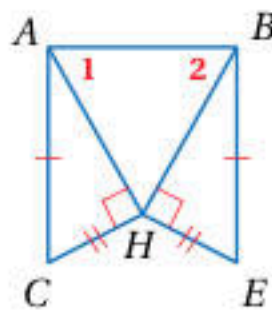
- a) 13.8° b) 76.2°
c) 60.9° d) 119.1°

6 أستخدم المعلومات المُعطاة على الشكل الآتي لكتابة برهانٍ سهمي؛ لأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

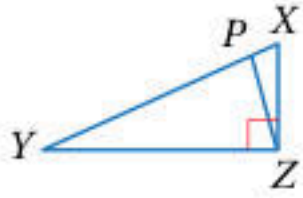


7 أستخدم المعلومات المُعطاة على الشكل المجاور لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن $\triangle MJK \cong \triangle KLM$

أستخدم المعلومات المُعطاة على الشكل الآتي؛ لأثبت أن $\angle 1 \cong \angle 2$



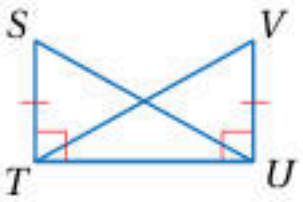
تدريب على الاختبارات الدولية



13 في الشكل المجاور
 $\triangle XZY$ قائم الزاوية،
فيه $\overline{YP} \cong \overline{YZ}$ و

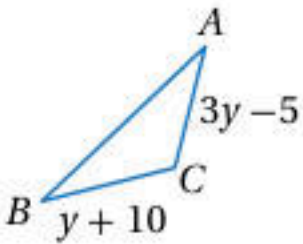
$m\angle PYZ = 26^\circ$ ، ما قياس $\angle XZP$ ؟

- a) 13° b) 26° c) 32° d) 64°



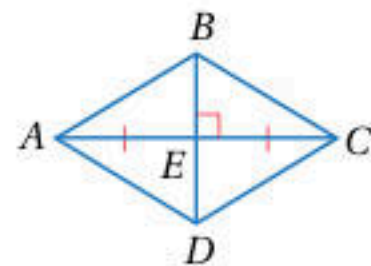
14 أي النظريات أو المسلّمات
يمكنُ بها إثباتُ تطابقِ
 $\triangle VUT$ و $\triangle STU$ ؟

- a) ASA b) HL c) SSS d) SAS



15 قيمة y بالوحدات التي
تجعلُ $\triangle ABC$ المجاورَ
متطابقَ الضلعين تساوي:

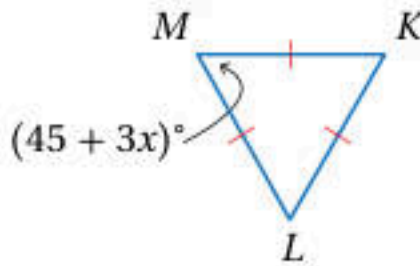
- a) $1\frac{1}{4}$ b) $7\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $15\frac{1}{2}$



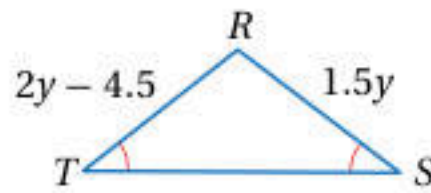
16 أي جُمْلِ التطابقِ
الآتية يمكنُ إثباتُها
بالمعلوماتِ المعطاةِ
في الشكلِ المجاورِ ؟

- a) $\triangle AEB \cong \triangle CED$ b) $\triangle ABD \cong \triangle BCA$
c) $\triangle BAC \cong \triangle DAC$ d) $\triangle DEC \cong \triangle DEA$

أجدُ قيمةَ المتغيرِ في كلِّ مِنَ الأشكالِ الآتية:



9

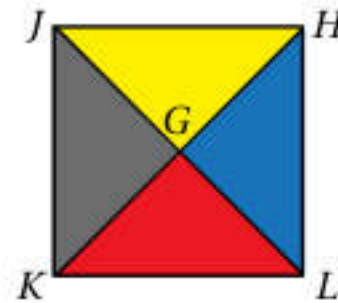


10

11 في الشكلِ الآتي، إذا علمتُ أنَّ

$GJ = GH = GL = GK$ ، فأثبتُ أنَّ

$\triangle JGK \cong \triangle LGH$



12 في الشكلِ الآتي، إذا علمتُ أنَّ $\overline{DF}$ ينصفُ $\angle CDE$ ،

و $\overline{CE} \perp \overline{DF}$ ، فأكتبُ برهانًا سهميًا؛ لأثبتُ أنَّ

$\triangle DGC \cong \triangle DGE$

